Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann
Dipl.-Math. Leonid Chaichenets, Johanna Richter, M.Sc.,
Tobias Ried, M.Sc., Tobias Schmid, M.Sc.

SS2017
14.07.2017

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

12. Übungsblatt

Aufgabe 67 (Übung)

Bestimmen Sie die Laurent-Reihen-Entwicklung inklusive Konvergenzgebiet von

(a) $f(z) = \frac{e^{2z}}{(z-1)^3}$ um $z_0 = 1$,

(b) $f(z) = (z-3)\sin\frac{1}{z+2}$ um $z_0 = -2$,

(c) $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$ um $z_0 = 0, 1, 2$.

Um welche Art von Singularität handelt es sich jeweils bei z_0?

Lösungsvorschlag

(a) Um f um die isolierte Singularität $z_0 = 1$ zu entwickeln, bringen wir f in die Form

$$f(z) = e^2 \frac{e^{2(z-1)}}{(z-1)^3}$$

und verwenden die Reihenentwicklung der komplexen Exponentialfunktion, um die Laurentreihenentwicklung

$$f(z) = e^2 \frac{1}{(z-1)^3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!}(z-1)^k = e^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!}(z-1)^{k-3} = e^2 \sum_{k=-3}^{\infty} \frac{2^{k+3}}{(k+3)!}(z-1)^k$$

von f zu erhalten. Diese konvergiert, da die Exponentialreihe auf ganz $\mathbb{C}$ konvergiert und es sich bei $z_0 = 1$ um eine isolierte Singularität handelt, auf $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, d.h. der Konvergenzradius der Reihe ist ∞. Dass es sich um einen Pol dritter Ordnung bei $z_0 = 1$ handelt, sieht man daran, dass der Hauptteil der Laurentreihe $\sum_{k=-\infty}^{-1} a_k(z-z_0)^k$ nach dem dritten Term abbricht, $a_k = 0$ für $k < -3$.

(b) Wir schreiben

$$f(z) = (z-3)\sin\frac{1}{z+2} = (z+2)\sin\frac{1}{z+2} - 5\sin\frac{1}{z+2}$$

und setzen die Reihenentwicklung der Sinus-Funktion ein. Daher ist die Laurentreihenentwicklung von f gegeben durch

$$\begin{aligned} f(z) &= (z+2)\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}(z+2)^{-(2k+1)} - 5\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}(z+2)^{-(2k+1)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}(z+2)^{-2k} - 5\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}(z+2)^{-(2k+1)} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{0} b_n z^n \end{aligned}$$

mit

$$b_n = \begin{cases} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}, & n = 2k \\ -5\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}, & n = 2k-1. \end{cases}$$

Da der Hauptteil der Laurentreihe nicht abbricht, handelt es sich bei der isolierten Singularität $z_0 = -2$ um eine wesentliche Singularität. Die Sinus-Reihe konvergiert auf ganz $\mathbb{C}$, weshalb die Laurentreihe von f auf $\mathbb{C} \setminus \{-2\}$ konvergiert.

(c) f besitzt die Partialbruchzerlegung

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = -\frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-2} = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}}.$$

Für die Laurentreihe um $z_0 = 0$ verwenden wir die geometrische Reihe, um

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(1 - 2^{-k-1}\right) z^k$$

zu erhalten. Die erste Reihe konvergiert für $|z| < 1$, die zweite für $|z| < 2$, damit ist der Konvergenzradius der Laurentreihe 1. Man beachte, dass dies der Abstand des Entwicklungspunktes zum nächstgelegenen Pol bei $z = 1$ ist... Die Laurentreihe um $z_0 = 0$ besteht nur aus dem Nebenteil, denn f besitzt keine Singularität in der 0.

Nun zur Entwicklung um die isolierten Singularitäten: f besitzt jeweils einen Pol erster Ordnung bei $z_1 = 1$ und $z_2 = 2$. Für $z_1 = 1$ erhalten wir

$$\begin{aligned} f(z) &= -\frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-2} = -\frac{1}{z-1} - \frac{1}{1-(z-1)} = -\frac{1}{z-1} - \sum_{k=0}^{\infty}(z-1)^k \\ &= \sum_{k=-1}^{\infty} (z-1)^k. \end{aligned}$$

Der Hauptteil der Laurentreihe besteht nur aus dem Term $-\frac{1}{z-1}$, die Reihe konvergiert auf der punktierten Kreisscheibe $z \in B_1(1) \setminus \{1\} = \{|z-1| < 1, z \neq 1\}$. Analog bekommt man für $z_2 = 2$

$$f(z) = -\frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-2} = -\frac{1}{1-(-(z-2))} + \frac{1}{z-2} = \frac{1}{z-2} - \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(z-2)^k$$

mit Konvergenzgebiet $B_1(2) \setminus \{2\}$. Der Hauptteil besteht wieder nur aus dem Term -1-ter Ordnung $\frac{1}{z-2}$.

Aufgabe 68 (Übung)

Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ eine *invertierbare* Matrix mit komplexen Einträgen und

$$\Phi(A)(z) := \frac{az+b}{cz+d}$$

die zu A assoziierte Möbiustransformation.

(a) Zeigen Sie, dass $\Phi(A) : \mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\} \to \mathbb{C}$ für $c \neq 0$ bzw. $\Phi(A) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ für $c = 0$ konform ist.

(b) Seien $A, A_1, A_2 \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ invertierbar. Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned} \Phi(A_1) \circ \Phi(A_2) &= \Phi(A_1 A_2) \quad \text{und} \\ \Phi(A)^{-1} &= \Phi(A)^{-1}, \end{aligned}$$

das heißt, die Menge der Möbiustransformationen ist eine Gruppe (bezüglich der Komposition).

(c) Zeigen Sie, dass Möbius-Transformationen Kreise und Geraden auf Kreise oder Geraden abbildet.

Lösungsvorschlag

(a) Wir müssen zeigen, dass $\Phi(A)'(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$ (für $c \neq 0$) bzw. $z \in \mathbb{C}$ (für $c = 0$).

Betrachten wir zunächst den Fall $c = 0$. Dann ist

$$\Phi(A)'(z) = \frac{a}{d} \neq 0,$$

denn aus der Invertierbarkeit der Matrix A folgt insbesondere, dass

$$\det A = ad - bc = ad \neq 0.$$

Für $c \neq 0$ gilt

$$\Phi(A)'(z) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \frac{az+b}{cz+d} = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2} = \frac{\det A}{(cz-d)^2} \neq 0.$$

Damit ist gezeigt, dass $\Phi(A)$ auf dem jeweiligen Definitionsbereich konform ist.

(b) Es seien

$$f_1(z) := \Phi(A_1)(z) = \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1}$$

und

$$f_2(z) := \Phi(A_2)(z) = \frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2}$$

Möbius-Transformationen mit $\det A_1 = a_1 d_1 - b_1 c_1 \neq 0$ und $\det A_2 = a_2 d_2 - b_2 c_2 \neq 0$. Die Komposition von f_1 und f_2 ist dann

$$(f_1 \circ f_2)(z) = \frac{a_1 f_2(z) + b_1}{c_1 f_2(z) + d_1} = \frac{a_1 \frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2} + b_1}{c_1 \frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2} + d_1} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 c_2) z + (a_1 b_2 + b_1 d_2)}{(c_1 a_2 + d_1 c_2) z + (c_1 b_2 + d_1 d_2)}.$$

Dies ist wieder eine Möbius-Transformation, denn

$$(a_1a_2 + b_1c_2)(c_1b_2 + d_1d_2) - (a_1b_2 + b_1d_2)(c_1a_2 + d_1c_2) = (a_1d_1 - b_1c_1)(a_2d_2 - b_2c_2)$$
$$= \det A_1 \det A_2 \neq 0.$$

Wegen

$$A_1A_2 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1a_2 + b_1c_2 & a_1b_2 + b_1d_2 \\ c_1a_2 + d_1c_2 & c_1b_2 + d_1d_2 \end{pmatrix}$$

sieht man durch Koeffizientenvergleich, dass $\Phi(A_1) \circ \Phi(A_2) = \Phi(A_1A_2)$. Man erinnere sich an dieser Stelle an die Multiplikativität der Determinante, weshalb $\det A_1A_2 = \det A_1 \det A_2 \neq 0$.

Daraus kann man auch $\Phi(A)^{-1} = \Phi(A^{-1})$ ablesen, denn wegen

$$\Phi(A)^{-1} \circ \Phi(A) = z = \Phi(I) = \Phi(A^{-1}A)$$

ist die Möbius-Transformation assoziiert zu

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

das Inverse zu $\Phi(A)$.

(c) Kreise und Geraden in $\mathbb{C}$ können über

$$K := \left\{ z \in \mathbb{C} \cup \{\infty\} : A|z|^2 + \overline{B}z + B\overline{z} + C = 0 \right\}$$

mit $A, C \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{C}$, $|B|^2 - AC > 0$, parametrisiert werden. Ist $A = 0$, erhält man eine Gerade, ansonsten ist K ein Kreis in $\mathbb{C}$. In der Tat, sei $z = x + \mathrm{i}y$, so lässt sich die bestimmende Gleichung in der Definition von K umformen zu

$$A(x^2 + y^2) + 2(\operatorname{Re} B)x + 2(\operatorname{Im} B)y + C = 0.$$

Für $A \neq 0$ definiert diese Gleichung einen Kreis. Durch quadratisches Ergänzen und Umformen erhält man

$$\left(x + \frac{\operatorname{Re} B}{A}\right)^2 + \left(y + \frac{\operatorname{Im} B}{A}\right)^2 = |B|^2 - AC,$$

also die bestimmende Gleichung eines Kreises mit Radius $\sqrt{|B|^2 - AC} > 0$ und Mittelpunkt

$$z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0 = \left(-\frac{\operatorname{Re} B}{A}\right) + \mathrm{i}\left(-\frac{\operatorname{Im} B}{A}\right) = -\frac{B}{A}.$$

Für $A = 0$ erhält man eine Geradengleichung, denn $|B|^2 > 0$ impliziert $B \neq 0$. Wir brauchen also im Weiteren nich zwischen Geraden und Kreisen unterscheiden (man bezeichnet die Mengen K in diesem Zusammenhang auch als *verallgemeinerte Kreise* in $\mathbb{C}$).

Sei nun

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc \neq 0,$$

eine Möbius-Transformation.

Fall 1: $c = 0$. In diesem Fall können wegen $ad - bc = ad \neq 0$ beide Zahlen a und d nicht verschwinden, und es ist $f(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$ eine Translation um $\frac{b}{d}$ und eine Streckung um den Faktor $\frac{a}{d}$. Damit werden durch f Kreise auf Kreise und Geraden auf Geraden abgebildet.

Fall 2: $c \neq 0$. Wir können f in die Form

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{az+b}{cz+d} = \frac{1}{c}\frac{acz+bc}{cz+d} = \frac{1}{c}\frac{acz+bc+ad-ad}{cz+d} \\ &= \frac{a}{c} + \frac{1}{c}\frac{bc-ad}{cz+d} \end{aligned}$$

bringen, und damit zerlegen in zwei Streckungen/Translationen und eine Inversion $z \to \frac{1}{z}$. Bezeichne

$$\begin{aligned} f_1(z) &= cz + d \\ f_2(z) &= \frac{1}{z} \\ f_3(z) &= \frac{bc-ad}{c}z + \frac{a}{c}, \end{aligned}$$

so können wir f schreiben als $f = f_3 \circ f_2 \circ f_1$. Wie im Fall 1 bilden f_1 und f_3 als Translationen und Streckungen Kreise auf Kreise und Geraden auf Geraden ab. Es bleibt zu zeigen, dass f_2 Kreise und Geraden auf Kreise und Geraden abbildet. Dazu betrachten wir

$$\begin{aligned} f_2(K) &= \left\{ z \in \mathbb{C} \cup \{\infty\} : \frac{A}{|z|^2} + \frac{\overline{B}}{z} + \frac{B}{\overline{z}} + C = 0 \right\} \\ &= \left\{ z \in \mathbb{C} \cup \{\infty\} : A + \overline{B}\overline{z} + Bz + C|z|^2 = 0 \right\} \end{aligned}$$

wobei Gleichung mit $|z|^2 = z\overline{z}$ multipliziert wurde. Also ist $f_2(K)$ wieder ein verallgemeinerter Kreis. Falls $A \neq 0$ und $C = 0$ bildet f_2 einen Kreis auf eine Gerade ab.

Aufgabe 69 (Tutorium)

(a) Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f, g : G \to \mathbb{C}$ holomorph. Existieren $a, b \in \mathbb{R}$ mit $(a, b) \subset G$ und $f(x) = g(x)$ für alle $x \in (a, b)$, dann gilt $f = g$ auf ganz G.

(ii) Es gibt genau eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(\frac{1}{k}) = \frac{1}{k^4}$ für alle $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

(iii) Es gibt genau eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(k) = k^2$ für alle $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Lösungsvorschlag

(i) Zu jedem Punkt $x \in (a, b)$ gibt es eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in (a, b) mit $x_n \to x$, d.h. jeder Punkt in $(a, b) \subset G$ ist Häufungspunkt. Da $(a, b) \subset \{z \in G : f(z) = g(z)\}$, gilt nach dem Identitätssatz schon $f \equiv g$ auf ganz G.

(ii) Die Aussage ist richtig. Durch die Funktion $f(z) = z^4$ ist eine solche Funktion gegeben. Sei g eine weitere Funktion, die die Voraussetzungen erfüllt. Dann gilt $g(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n^4} = f(\frac{1}{n})$ für alle $n \in \mathbb{N}$, sodass f und g auf der Menge

$$\left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\}$$

mit Häufungspunkt 0 übereinstimmen. Nach dem Identitätssatz gilt $g \equiv f$, womit die Existenz genau einer Funktion gezeigt ist.

(iii) Die Aussage ist falsch. Offensichtlich erfüllt die Funktion $f(z) = z^2$ alle Forderungen, aber wir können sie mit einer beliebigen ganzen Funktion g multiplizieren, die $g(k) = 1$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ erfüllt, beispielsweise $g(z) = 1 + \sin(\pi z)$. Somit gibt es mehr als nur eine Funktion, die die Voraussetzungen erfüllt.

(b) Komplexe Potenzen

(i) Für welche $z, w \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ gilt die Gleichung $\operatorname{Log} z + \operatorname{Log} w = \operatorname{Log} zw$? Geben Sie ein Beispiel an, für das $\operatorname{Log} z + \operatorname{Log} w \neq \operatorname{Log} zw$.

(ii) Für welche α, β, z gilt die Gleichung $z^\alpha z^\beta = z^{\alpha+\beta}$?

(iii) Welche Bedingungen müssen an α, β, z gestellt werden, damit $(z^\alpha)^\beta = z^{\alpha\beta}$ gilt? Geben Sie ein Beispiel an, für das $(z^\alpha)^\beta \neq z^{\alpha\beta}$.

(iv) Berechnen Sie alle zwölften Wurzeln von 1.

Lösungsvorschlag

(i) Schreibe $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ als $z = |z| e^{\mathrm{i} \operatorname{Arg}(z)}$ mit dem Hauptzweig des Arguments mit Werten in $(-\pi, \pi)$. Dann gilt

$$\operatorname{Log} z = \log |z| + \mathrm{i} \operatorname{Arg} z,$$

und somit für $z, w \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$

$$\operatorname{Log} z + \operatorname{Log} w = \log |z| + \log |w| + \mathrm{i}(\operatorname{Arg} z + \operatorname{Arg} w) = \log |zw| + \mathrm{i}(\operatorname{Arg} z + \operatorname{Arg} w).$$

Andererseits ist

$$\operatorname{Log} zw = \log|zw| + \mathrm{i}\operatorname{Arg}(zw) = \log|zw| + \mathrm{i}(\operatorname{Arg} z + \operatorname{Arg} w)$$

genau dann, wenn $\operatorname{Arg} z + \operatorname{Arg} w \in (-\pi, \pi)$. Somit gilt die Gleichung genau dann, wenn $\operatorname{Arg} z + \operatorname{Arg} w \in (-\pi, \pi)$.
Als Gegenbeispiel betrachte man $z = -1 + \mathrm{i} = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\frac{3}{4}\pi\mathrm{i}}$ und $w = \mathrm{i} = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\pi\mathrm{i}}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\operatorname{Log} z + \operatorname{Log} w &= \frac{1}{2}\log 2 + \frac{5}{4}\pi\mathrm{i},\\
\operatorname{Log} zw &= \operatorname{Log}\left(\sqrt{2}\mathrm{e}^{5\pi\mathrm{i}}\right) = \operatorname{Log}\left(\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\frac{3}{4}\pi\mathrm{i}}\right) = \frac{1}{2}\log 2 - \frac{3}{4}\pi\mathrm{i}
\end{aligned}$$

(ii) Die Gleichung gilt für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, falls $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, denn

$$z^\alpha z^\beta = \mathrm{e}^{\alpha \operatorname{Log} z}\mathrm{e}^{\beta \operatorname{Log} z} = \mathrm{e}^{(\alpha+\beta)\operatorname{Log} z} = z^{\alpha+\beta}.$$

(iii) Sei $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ derart, dass $z^\alpha \notin (-\infty, 0]$. Dann gilt

$$(z^\alpha)^\beta = \mathrm{e}^{\beta \operatorname{Log} z^\alpha} = \mathrm{e}^{\beta \operatorname{Log} \exp(\alpha \operatorname{Log} z)}.$$

Es stellt sich also die Frage, für welche $w \in \mathbb{C}$ die Identität

$$\operatorname{Log} \mathrm{e}^w = w$$

gilt. Dazu zerlegt man $w = \operatorname{Re} w + \mathrm{i}\operatorname{Im} w$ und schreibt

$$\mathrm{e}^w = \mathrm{e}^{\operatorname{Re} w + \mathrm{i}\operatorname{Im} w} = \mathrm{e}^{\operatorname{Re} w}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\operatorname{Im} w}.$$

Ist nun $\operatorname{Im} w \in (-\pi, \pi)$, so erhält man

$$\operatorname{Log} \mathrm{e}^w = \log \mathrm{e}^{\operatorname{Re} w} + \mathrm{i}\operatorname{Im} w = \operatorname{Re} w + \mathrm{i}\operatorname{Im} w = w.$$

Damit gilt

$$(z^\alpha)^\beta = \mathrm{e}^{\beta \operatorname{Log}\exp(\alpha \operatorname{Log} z)} = \mathrm{e}^{\beta\alpha \operatorname{Log} z} = z^{\alpha\beta}$$

falls $\operatorname{Im}(\alpha \operatorname{Log} z) \in (-\pi, \pi)$.
Als Gegenbeispiel betrachte man etwa $\alpha = 3$, $\beta = \frac{1}{2}$, und $z = \mathrm{i} = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}\mathrm{i}}$. Dann ist

$$(z^\alpha)^\beta = \left(\mathrm{e}^{\frac{3}{2}\pi\mathrm{i}}\right)^{1/2} = (-\mathrm{i})^{1/2} = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\operatorname{Log}(-\mathrm{i})} = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}(\log 1 - \mathrm{i}\frac{\pi}{2})} = \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{4}} = \frac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}},$$

aber

$$z^{\alpha\beta} = \mathrm{i}^{3/2} = \mathrm{e}^{\frac{3}{2}\frac{\mathrm{i}\pi}{2}} = \mathrm{e}^{\frac{3}{4}\pi\mathrm{i}} = \frac{-1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}.$$

(iv) Alle zwölften Wurzeln von 1 sind durch

$$w_k = \sqrt[12]{|1|}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\arg(1)+2k\pi}{12}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{k\pi}{6}}$$

für $k = 0, \ldots, 11$ gegeben. Die bekannten Werte von Sinus und Kosinus an diesen Punkten ergeben die Wurzeln ± 1, $\pm\mathrm{i}$, $\frac{\sqrt{3}}{2} \pm \mathrm{i}\frac{1}{2}$, $-\frac{\sqrt{3}}{2} \pm \mathrm{i}\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} \pm \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$ und $-\frac{1}{2} \pm \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Aufgabe 70 (Tutorium)

(a) Klassifizieren Sie die Polstellen von $f_n(z) = (z^2+1)^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$, und berechnen Sie die Residuen in diesen Punkten.

(b) Berechnen Sie $\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\gamma_\pm} \frac{\mathrm{d}z}{z}$ für $\gamma_\pm(t) = \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}t}$, $t \in [0, 2\pi]$.

(c) Berechnen Sie $\int_\gamma f_n(z)\mathrm{d}z$ entlang des positiv orientierten Randes des Kreises um 0 mit Radius 2.

(d) Welches Ergebnis vermuten Sie für das Integral $\int_\gamma f_n(z)\mathrm{d}z$ entlang der Kurve parametrisiert durch $\gamma(t) = 2(\cos t \sin t + \mathrm{i}\cos t)$, $t \in [-\pi, \pi]$?

LÖSUNGSVORSCHLAG

(a) Wegen $z^2+1 = (z+\mathrm{i})(z-\mathrm{i})$ hat f_n jeweils eine n-fache Polstelle bei $\pm\mathrm{i}$,

$$f_n(z) = (z+\mathrm{i})^{-n}(z-\mathrm{i})^{-n}.$$

Mit der Formel aus der Vorlesung erhalten wir

$$\begin{aligned}
\operatorname{res}(f_n, \mathrm{i}) &= \frac{1}{(n-1)!} \frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}} (z-\mathrm{i})^n f_n(z) \Big|_{z=\mathrm{i}} = \frac{1}{(n-1)!} \frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}} (z+\mathrm{i})^{-n} \Big|_{z=\mathrm{i}} \\
&= \frac{1}{(n-1)!} (-1)^{n-1} n \cdot (n+1) \cdots (2n-2) \cdot (z+\mathrm{i})^{-(2n-1)} \Big|_{z=\mathrm{i}} \\
&= \frac{1}{(n-1)!} \frac{(2n-2)!}{(n-1)!} (-1)^{n-1} \frac{1}{(2\mathrm{i})^{(2n-1)}} \\
&= \frac{(2n-2)!}{((n-1)!)^2} \frac{\mathrm{i}}{2^{2n-1}}.
\end{aligned}$$

Analog erhält man für das zweite Residuum

$$\begin{aligned}
\operatorname{res}(f_n, -\mathrm{i}) &= \frac{1}{(n-1)!} \frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}} (z+\mathrm{i})^n f_n(z) \Big|_{z=-\mathrm{i}} = \frac{1}{(n-1)!} \frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}} (z-\mathrm{i})^{-n} \Big|_{z=-\mathrm{i}} \\
&= \frac{1}{(n-1)!} (-1)^{n-1} n \cdot (n+1) \cdots (2n-2) \cdot (z-\mathrm{i})^{-(2n-1)} \Big|_{z=-\mathrm{i}} \\
&= \frac{1}{(n-1)!} \frac{(2n-2)!}{(n-1)!} (-1)^{n-1} \frac{1}{(-2\mathrm{i})^{(2n-1)}} \\
&= -\frac{(2n-2)!}{((n-1)!)^2} \frac{\mathrm{i}}{2^{2n-1}}.
\end{aligned}$$

(b) Einsetzen in die Definition von komplexen Kurvenintegralen liefert

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\gamma_\pm} \frac{\mathrm{d}z}{z} = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\gamma_\pm(t)} \gamma_\pm'(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}t}} \left(\pm\mathrm{i}\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}t}\right) \mathrm{d}t = \frac{\pm 2\pi\mathrm{i}}{2\pi\mathrm{i}} = \pm 1,$$

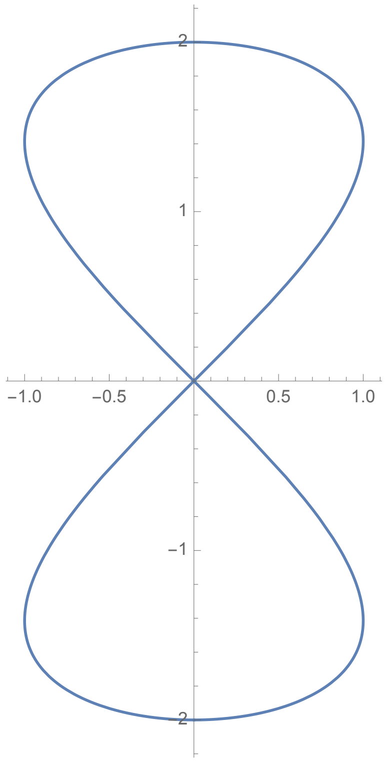
das heißt $+1$, falls die Polstelle $z_0 = 0$ im mathematisch positiven Sinn umlaufen wird, und -1 falls die Polstelle im mathematisch negativen Sinn durchlaufen wird.

(c) Win in Aufgabenteil (a) gesehen, besitzt für festes $n \in \mathbb{N}$ die Funktion f_n zwei isolierte Polstellen n-ter Ordnung bei $\pm\mathrm{i}$ und ist sonst holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{\pm\mathrm{i}\}$. Da beide Polstellen im Inneren des von γ berandeten Gebiets (der Kreisscheibe mit Radius 2 um 0) liegen, erhalten wir mit dem Residuensatz

$$\int_\gamma f_n(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}(\operatorname{res}(f_n, \mathrm{i}) + \operatorname{res}(f_n, -\mathrm{i})) = 0.$$

(d) Die Kurve γ beschreibt eine Schleife, welche die Polstelle $z_1 = -\mathrm{i}$ im mathematisch positiven Sinn umläuft, die Polstelle bei $z_2 = \mathrm{i}$ jedoch im mathematisch negativen Sinn. Dies wirkt sich (vergleiche dazu Aufgabenteil (b)) durch ein entsprechendes Vorzeichen im Residuensatz aus. Es gilt

$$\begin{aligned}\int_\gamma f_n(z)\,\mathrm{d}z &= 2\pi\mathrm{i}(\operatorname{res}(f_n, -\mathrm{i}) - \operatorname{res}(f_n, \mathrm{i})) \\ &= -2\pi\mathrm{i}\frac{2\mathrm{i}}{2^{2n-1}}\frac{(2n-2)!}{((n-1)!)^2} = \frac{\pi}{2^{2n-3}}\frac{(2n-2)!}{((n-1)!)^2}.\end{aligned}$$



Aufgabe 71 (Tutorium)

Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} \alpha^2 > 0$. Zeigen Sie durch Wahl eines geeigneten Integrationsweges in der komplexen Ebene, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-(\alpha x+\beta)^2} \, \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha}.$$

Sie dürfen verwenden, dass $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2} \, \mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$.

Lösungsvorschlag

Im Fall $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, d.h. $\operatorname{Im} \alpha = \operatorname{Im} \beta = 0$ erhalten wir durch eine einfache Substitution $y = \alpha x + \beta$ (ohne auf Methoden der komplexen Analysis zurückzugreifen)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-(\alpha x+\beta)^2} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-y^2} \, \mathrm{d}y = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha}.$$

Sei also $\operatorname{Im} \alpha \neq 0$. Wir können das Integral

$$\int_{-R}^{R} \mathrm{e}^{-(\alpha x+\beta)^2} \, \mathrm{d}x$$

als komplexes Wegintegral der auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphen Funktion e^{-z^2} entlang der Strecke $[-\alpha R+\beta, \alpha R+\beta]$ in der komplexen Ebene auffassen. Die Strecke ist dabei parametrisiert durch $\psi : [-R, R] \to \mathbb{C}$, $\psi(x) := \alpha x + \beta$. In der Tat gilt

$$\int_{-R}^{R} \mathrm{e}^{-(\alpha x+\beta)^2} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha} \int_{-R}^{R} \mathrm{e}^{-\psi(x)^2} \psi'(x) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha} \int_{[-\alpha R+\beta, \alpha R+\beta]} \mathrm{e}^{-z^2} \, \mathrm{d}z.$$

Um das gesuchte Integral auf das bekannte Integral $\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x^2} \, \mathrm{d}x$ zurückführen zu können, betrachten wir die Strecke $[-(\operatorname{Re} \alpha)R, (\operatorname{Re} \alpha)R]$ auf der reellen Achse, und verbinden sie mit der Strecke $[-\alpha R + \beta, \alpha R + \beta]$ derart, dass ein geschlossener Pfad in $\mathbb{C}$ entsteht. Da e^{-z^2} eine ganze Funktion ist, liefert der Cauchysche Integralsatz

$$\begin{aligned} \int_{[-(\operatorname{Re} \alpha)R, (\operatorname{Re} \alpha)R]} \mathrm{e}^{-z^2} \, \mathrm{d}z + \int_{[(\operatorname{Re} \alpha)R, \alpha R+\beta]} \mathrm{e}^{-z^2} \, \mathrm{d}z \\ + \int_{[\alpha R+\beta, -\alpha R+\beta]} \mathrm{e}^{-z^2} \, \mathrm{d}z + \int_{[-\alpha R+\beta, -(\operatorname{Re} \alpha)R]} \mathrm{e}^{-z^2} \, \mathrm{d}z = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

also

$$\int_{[-\alpha R+\beta, \alpha R+\beta]} \mathrm{e}^{-z^2} \, \mathrm{d}z = \int_{[-(\operatorname{Re} \alpha)R, (\operatorname{Re} \alpha)R]} \mathrm{e}^{-z^2} \, \mathrm{d}z + I_1(R) + I_2(R). \tag{2}$$

Man beachte, dass von (1) nach (2) die Richtung des Pfads $[\alpha R+\beta, -\alpha R+\beta]$ umgefreht wurde.

Streng genommen müssen wir an dieser Stelle etwas sorgfältiger argumentieren, da der Cauchy-Integralsatz nur für einfach geschlossene Kurven, die in mathematisch positiver Richtung durchlaufen werden, gezeigt wurde. Ist $R > |\beta|$, so kann man den Integrationsweg jedoch in zwei Dreiecke zerlegen, die sich im Schnittpunkt $\operatorname{Re} \beta - \frac{\operatorname{Re} \alpha}{\operatorname{Im} \alpha} \operatorname{Im} \beta$ mit der Realteil-Achse berühren, und jeweils für die Dreiecke den Cauchy-Integralsatz anwenden. Danach setzt man den Integrationsweg zu obigem Weg zusammen, siehe dazu auch Abbildung 1.

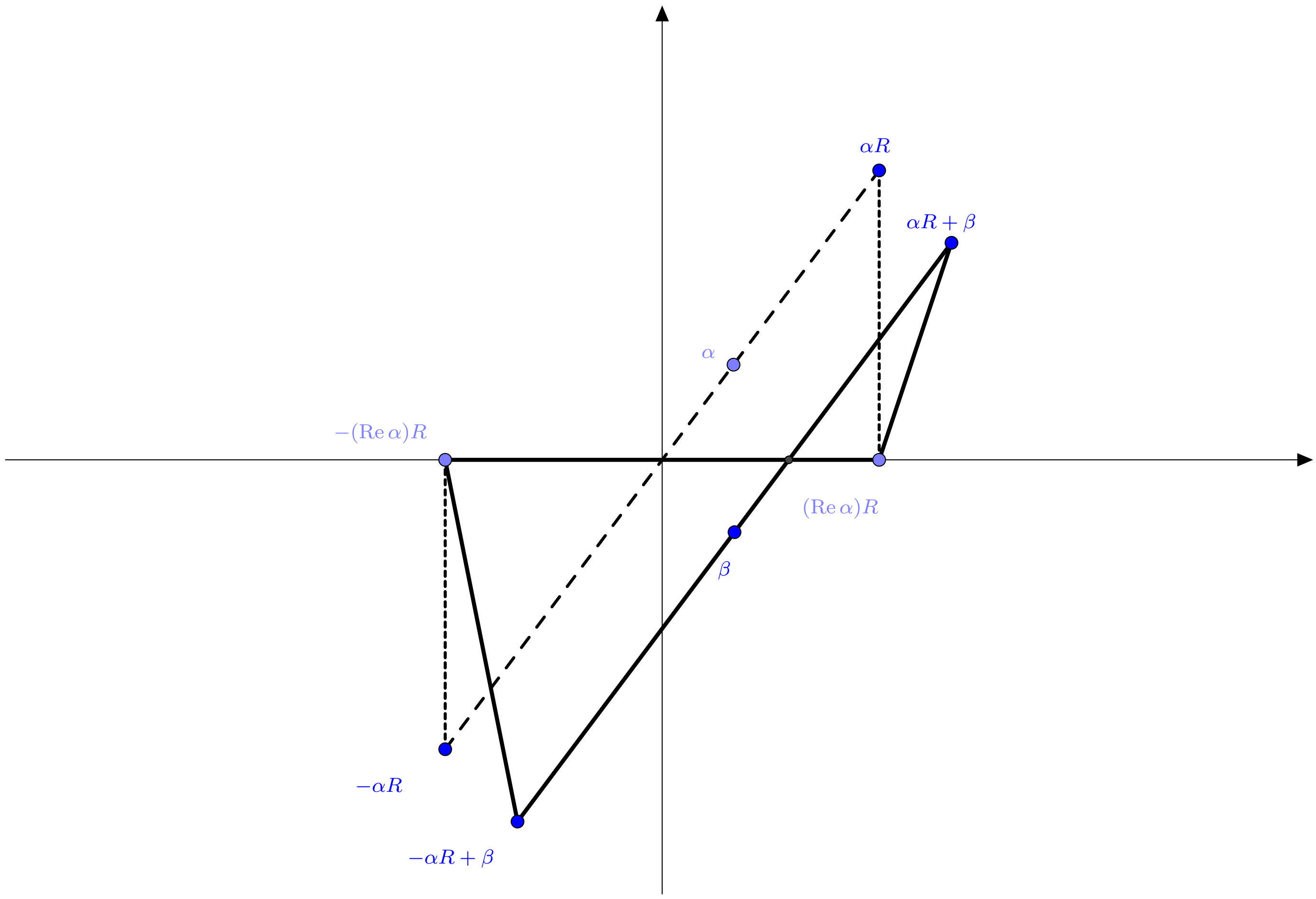


Abbildung 1: Der Integrationsweg für das komplexe Gauß-Integral.

Der erste Term in auf der rechten Seite von Gleichung (2) strebt gegen $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$, auf der linken Seite steht das Integral, das wir ausrechnen wollen.
Wir zeigen nun, dass die Beiträge $I_{1,2}(R)$ der Hilfswege im Grenzwert $R \to \infty$ beide verschwinden. Für $I_1(R)$ gilt mit der Parametrisierung $\psi : [0,1] \to \mathbb{C}$, $\psi(s) = (\operatorname{Re}\alpha + \mathrm{i}s\operatorname{Im}\alpha)R + s\beta$,

$$\begin{aligned}\left|\int_{[(\operatorname{Re}\alpha)R,\alpha R+\beta]} \mathrm{e}^{-z^2}\,\mathrm{d}z\right| &= \left|\int_0^1 (\mathrm{i}(\operatorname{Im}\alpha)R+\beta)\mathrm{e}^{-((\operatorname{Re}\alpha+\mathrm{i}s\operatorname{Im}\alpha)R+s\beta)^2}\,\mathrm{d}s\right| \\ &\leq \int_0^1 (|\operatorname{Im}\alpha|R+|\beta|)\left|\mathrm{e}^{-((\operatorname{Re}\alpha+\mathrm{i}s\operatorname{Im}\alpha)R+s\beta)^2}\right|\,\mathrm{d}s\end{aligned} \tag{3}$$

Wegen

$$\begin{aligned}((\operatorname{Re}\alpha+\mathrm{i}s\operatorname{Im}\alpha)R+s\beta)^2 &= \left[(\operatorname{Re}\alpha)^2 - s^2(\operatorname{Im}\alpha)^2 + 2\mathrm{i}s\operatorname{Re}\alpha\operatorname{Im}\alpha\right]R^2 \\ &\quad + s^2\left[(\operatorname{Re}\beta)^2 - (\operatorname{Im}\beta)^2 + 2\mathrm{i}\operatorname{Re}\beta\operatorname{Im}\beta\right]\end{aligned}$$

ist

$$\left|\mathrm{e}^{-((\operatorname{Re}\alpha+\mathrm{i}s\operatorname{Im}\alpha)R+s\beta)^2}\right| = \mathrm{e}^{-\left[(\operatorname{Re}\alpha)^2-s^2(\operatorname{Im}\alpha)^2\right]R^2+s^2\left[(\operatorname{Re}\beta)^2-(\operatorname{Im}\beta)^2\right]}.$$

Man beachte, dass der erste Term im Exponenten nach Voraussetzung immer positiv ist, denn

$$(\operatorname{Re}\alpha)^2 - s^2(\operatorname{Im}\alpha)^2 \geq (\operatorname{Re}\alpha)^2 - (\operatorname{Im}\alpha)^2 = \operatorname{Re}\alpha^2 > 0$$

für alle $s \in [0,1]$, und somit ist der Integrand in (3) beschränkt mit

$$(|\operatorname{Im}\alpha|R + |\beta|)\left|\mathrm{e}^{-((\operatorname{Re}\alpha + \mathrm{i}s\operatorname{Im}\alpha)R + s\beta)^2}\right| \leq (|\operatorname{Im}\alpha|R + |\beta|)\mathrm{e}^{-(\operatorname{Re}\alpha^2)R^2}\mathrm{e}^{\operatorname{Re}\beta^2} \to 0$$

für $R \to \infty$. Damit geht auch das Integral $I_1(R) \to 0$.
Ähnlich zeigt man, dass $I_2(R) \to 0$, und erhält insgesamt aus (2)

$$\begin{aligned}
\alpha \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-(\alpha x+\beta)^2}\,\mathrm{d}x &= \lim_{R\to\infty} \int_{[-\alpha R+\beta, \alpha R+\beta]} \mathrm{e}^{-z^2}\,\mathrm{d}z \\
&= \lim_{R\to\infty} \left(\int_{[-(\operatorname{Re}\alpha)R, (\operatorname{Re}\alpha)R]} \mathrm{e}^{-z^2}\,\mathrm{d}z + I_1(R) + I_2(R) \right) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}.
\end{aligned}$$