Karlsruhe Institute of Technology

Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann
Dipl.-Math. Leonid Chaichenets, Johanna Richter, M.Sc.,
Tobias Ried, M.Sc., Tobias Schmid, M.Sc.

SS2017
19.07.2017

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

13. Übungsblatt

Aufgabe 72 (Übung)

(a) Seien $f, g \in \mathcal{C}_{\text{per}}([-\pi,\pi],\mathbb{C})$ mit Fourierkoeffizienten $\widehat{f}$ und $\widehat{g}$. Die *Faltung* von f mit g ist definiert als

$$(f * g)(t) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t-s)g(s)\,\mathrm{d}s.$$

Zeigen Sie, dass $\widehat{f * g}(k) = \widehat{f}(k)\widehat{g}(k)$ für alle $k \in \mathbb{Z}$.

(b) Sei $f \in \mathcal{C}^m_{\text{per}}([-\pi,\pi]) = \{h \in \mathcal{C}^m([-\pi,\pi],\mathbb{C}) : f^{(n)}(-\pi) = f^{(n)}(\pi), n = 0,\dots,m-1\}$ für ein $m \geq 1$. Dann gilt

$$\widehat{f^{(n)}}(k) = (\mathrm{i}k)^n \widehat{f}(k), \quad k \in \mathbb{Z},$$

für $n = 1,\dots,m$, und

$$\widehat{f}(k) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{|k|^m}\right).$$

(c) Zeigen Sie: Sind die Fourierkoeffizienten einer Funktion $f \in \mathcal{C}_{\text{per}}([-\pi,\pi])$ absolut summierbar, so konvergiert die Fourierreihe gleichmäßig gegen f. Folgern Sie, dass die Fourierreihe einer Funktion in $\mathcal{C}^m_{\text{per}}$ für $m \geq 2$ gleichmäßig gegen f konvergiert.

Aufgabe 73 (Übung)

Sei γ eine einfach geschlossene reguläre Kurve in $\mathbb{R}^2$ mit Länge ℓ. Mit A werde die Fläche des von γ eingeschlossenen Gebiets bezeichnet. Zeigen Sie die isoperimetrische Ungleichung

$$A \leq \frac{\ell^2}{4\pi},$$

mit Gleichheit genau dann wenn γ ein Kreis ist.
Stellen Sie dazu die Komponentenfunktionen $\gamma_{1,2}$ der Kurve mithilfe von Fourierreihen dar und verwenden sie die Parseval-Identität(en)

$$\|f\|^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(k)|^2, \quad (f|g) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(k)\overline{\widehat{g}(k)}.$$

— Bitte wenden! —

Aufgabe 74 (Tutorium)

Sei $f \in \mathcal{C}_{\text{per}}([-\pi,\pi],\mathbb{C})$ mit Fourierkoeffizienten $\hat{f}$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $\widehat{\overline{f}}(k) = \overline{\widehat{f}(-k)}$ für alle $k \in \mathbb{Z}$.

(b) $\widehat{\widetilde{f}}(k) = \widehat{f}(-k)$ für alle $k \in \mathbb{Z}$, wobei $\widetilde{f}(t) := f(-t)$.

(c) Ist f reellwertig und gerade, d.h. $f(-t) = f(t)$ für alle $t \in [-\pi,\pi]$, so sind alle Fourierkoeffizienten rein reell, ist f reellwertig ungerade, d.h. $f(-t) = -f(t)$ für alle $t \in [-\pi,\pi]$, so sind alle Fourierkoeffizienten rein imaginär. Was bedeutet das für die Sinus-/Cosinus-Koeffizienten von f?

(d) $\widehat{f(\cdot - y)}(k) = \hat{f}(k)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ky}$ für alle $y \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Aufgabe 75 (Tutorium)

Berechnen Sie die Fourier-Koeffizienten der Funktionen $f_j : (-\pi,\pi] \to \mathbb{C}$, $j = 1,\ldots,4$, mit

(a) $f_1(t) = \begin{cases} \frac{1}{2a} & \text{für } |t| < a, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ für ein festes $0 < a < \pi$,

(b) $f_2(t) = |\cos(t)|$,

(c) $f_3(t) = t(\pi - |t|)$ und

(d) $f_4(t) = \sin^2(t)$

für jedes $t \in (-\pi,\pi]$. Für welche $t \in (-\pi,\pi]$ konvergiert die jeweilige Fourier-Reihe? In welchen $t \in (-\pi,\pi]$ stellt sie die jeweilige Funktion dar? Ist die Konvergenz gleichmäßig?

Aufgabe 76 (Tutorium)

Berechnen Sie die folgenden Reihenwerte mithilfe geeigneter Fourierreihen.

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{4k^2-1}$

(b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}$

Hinweis: Aufgabe 75 und Parseval-Identität.