**Institut für Analysis**
PD Dr. Peer Christian Kunstmann
Dipl.-Math. Leonid Chaichenets, Johanna Richter, M.Sc.,
Tobias Ried, M.Sc., Tobias Schmid, M.Sc.

SS2017
21.07.2017

# Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

## 13. Übungsblatt

**Aufgabe 72** (Übung)

(a) Seien $f, g \in \mathcal{C}_{\text{per}}([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ mit Fourierkoeffizienten $\widehat{f}$ und $\widehat{g}$. Die *Faltung* von $f$ mit $g$ ist definiert als

$$(f * g)(t) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t-s)g(s)\,\mathrm{d}s.$$

Zeigen Sie, dass $\widehat{f * g}(k) = \widehat{f}(k)\widehat{g}(k)$ für alle $k \in \mathbb{Z}$.

(b) Sei $f \in \mathcal{C}^m_{\text{per}}([-\pi, \pi]) = \{h \in \mathcal{C}^m([-\pi, \pi], \mathbb{C}) : f^{(n)}(-\pi) = f^{(n)}(\pi), n = 0, \ldots, m-1\}$ für ein $m \geq 1$. Dann gilt

$$\widehat{f^{(n)}}(k) = (\mathrm{i}k)^n \widehat{f}(k), \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{1}$$

für $n = 1, \ldots, m$, und

$$\widehat{f}(k) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{|k|^m}\right).$$

(c) Zeigen Sie: Sind die Fourierkoeffizienten einer Funktion $f \in \mathcal{C}_{\text{per}}([-\pi, \pi])$ absolut summierbar, so konvergiert die Fourierreihe gleichmäßig gegen $f$. Folgern Sie, dass die Fourierreihe einer Funktion in $\mathcal{C}^m_{\text{per}}$ für $m \geq 2$ gleichmäßig gegen $f$ konvergiert.

Lösungsvorschlag

(a) Es gilt nach Definition der Fourierkoeffizienten für alle $k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}
\widehat{f * g}(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f * g)(t)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t-s)g(s)\,\mathrm{d}s\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t-s)\, g(s)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\,\mathrm{d}s\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t-s)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(t-s)}\,\mathrm{d}t\, g(s)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}ks}\,\mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi+s}^{\pi+s} f(t)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\,\mathrm{d}t\, g(s)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}ks}\,\mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\,\mathrm{d}t\, g(s)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}ks}\,\mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\,\mathrm{d}t\, \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(s)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}ks}\,\mathrm{d}s \\
&= \widehat{f}(k)\widehat{g}(k).
\end{aligned}$$

Hierbei haben wir verwendet, dass die Integrationsreihenfolge vertauscht werden kann, sowie die Periodizität von $f$, um

$$\int_{-\pi+s}^{\pi+s} f(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\,\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\,\mathrm{d}t$$

zu folgern.

(b) Wir betrachten zunächst den Fall $k = 0$. Hier gilt nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$\widehat{f^{(n)}}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\left[f^{(n-1)}(\pi) - f^{(n-1)}(-\pi)\right] = 0,$$

da nach Annahme $f^{(n-1)}$ periodisch ist. Für $k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ gehen wir induktiv vor: für $n = 1$ erhält man mittels partieller Integration

$$\begin{aligned}\widehat{f'}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\left[f(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\right)\,\mathrm{d}t\\ &= 0 + \mathrm{i}k\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\,\mathrm{d}t = \mathrm{i}k\widehat{f}(k).\end{aligned}$$

Hierbei haben wir die Periodizität von $f$, $f(-\pi) = f(\pi)$, sowie der komplexen Exponentialfunktion, $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\pi} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\pi}$, verwendet. Der Induktionsschritt folgt nun wieder mit partieller Integration: sei $2 \le n \le m$, und sei Gleichung (1) erfüllt für alle $1 \le n' < n$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\widehat{f^{(n)}}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^{(n)}(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\left[f^{(n-1)}(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^{(n-1)}(t)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\right)\,\mathrm{d}t\\ &= 0 + \mathrm{i}k\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^{(n-1)}(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\,\mathrm{d}t = (\mathrm{i}k)(\mathrm{i}k)^{n-1}\widehat{f}(k) = (\mathrm{i}k)^n\widehat{f}(k).\end{aligned}$$

Per Induktion gilt dann Gleichung (1) für alle $1 \le n \le m$.

Weiter erhalten wir für $n = m$ und $k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$

$$|\widehat{f}(k)| = \left|\frac{\widehat{f^{(m)}}(k)}{(\mathrm{i}k)^m}\right| = \frac{1}{|k|^m}\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^{(m)}(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\,\mathrm{d}t\right| \le \frac{1}{|k|^m}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f^{(m)}(t)|\,\mathrm{d}t \le \frac{C}{|k|^m},$$

wobei wir im letzten Schritt verwendet haben, dass $f \in \mathcal{C}^m_{\mathrm{per}}([-\pi,\pi])$, also $f^{(m)}$ stetig und damit beschränkt auf der kompakten Menge $[-\pi,\pi]$ ist, insbesondere

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f^{(m)}(t)|\,\mathrm{d}t \le \sup_{t\in[-\pi,\pi]} |f^{(m)}(t)| = C < \infty.$$

Es folgt $\hat{f}(k) = \mathcal{O}(|k|^{-m}$, falls $f \in \mathcal{C}^m_{\mathrm{per}}$.

(c) Sei $f \in \mathcal{C}_{\mathrm{per}}([-\pi,\pi])$ mit Fourierkoeffizienten $\widehat{f}(k)$, $k \in \mathbb{Z}$, und es gelte $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(k)| < \infty$. Dann konvergiert die Folge der Fourier-Partialsummen

$$g_N(t) = \sum_{|k|\le N} \widehat{f}(k)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}$$

absolut und gleichmäßig gegen die stetige Grenzfunktion $g(t) = \sum_{|k|\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(k)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt} \in \mathcal{C}_{\mathrm{per}}([-\pi,\pi])$, denn wegen

$$\left|\widehat{f}(k)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}\right| \le |\widehat{f}(k)|, \quad \text{für alle } t \in [-\pi,\pi],$$

gilt

$$\begin{aligned}\sup_{t\in[-\pi,\pi]}|g(t)-g_N(t)| &= \sup_{t\in[-\pi,\pi]}\left|\sum_{|k|\geq N+1}\widehat{f}(k)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}\right| \\ &\leq \sup_{t\in[-\pi,\pi]}\sum_{|k|\geq N+1}|\widehat{f}(k)| \to 0 \quad \text{für} \quad N\to\infty\end{aligned}$$

aufgrund der Summierbarkeit von $\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\widehat{f}(k)|<\infty$. Weiter sind die Fourierkoeffizienten von $g$ gleich der Fourierkoeffizienten von $f$ (denn wegen gleichmäßiger Konvergenz können Limes und Integral vertauscht werden),

$$\begin{aligned}\widehat{g}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\,\mathrm{d}t = \lim_{N\to\infty}\sum_{|j|\leq N}\widehat{f}(j)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k-j)t}\,\mathrm{d}t \\ &= \lim_{N\to\infty}\sum_{|j|\leq N}\widehat{f}(j)\delta_{kj} = \widehat{f}(k).\end{aligned}$$

Nach dem Darstellungssatz 23.6 muss dann aber schon $f=g$ gelten (beide Funktionen sind in $\mathcal{C}_{\text{per}}$!).

Ist nun $f\in\mathcal{C}^m_{\text{per}}$ für ein $m\geq 2$, so gilt wegen $|\widehat{f}(k)|=\mathcal{O}(|k|^{-m})$ die Reiher der Fourierkoeffizienten absolut summierbar, denn

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\widehat{f}(k)|\leq\widehat{f}(0)+\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\frac{C}{|k|^m}=\widehat{f}(0)+2C\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^m}<\infty,$$

da $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ für $s>1$ konvergiert.

**Aufgabe 73** (Übung)

Sei $\gamma$ eine einfach geschlossene reguläre Kurve in $\mathbb{R}^2$ mit Länge $\ell$. Mit $A$ werde die Fläche des von $\gamma$ eingeschlossenen Gebiets bezeichnet. Zeigen Sie die isoperimetrische Ungleichung

$$A \le \frac{\ell^2}{4\pi},$$

mit Gleichheit genau dann wenn $\gamma$ ein Kreis ist.
Stellen Sie dazu die Komponentenfunktionen $\gamma_{1,2}$ der Kurve mithilfe von Fourierreihen dar und verwenden sie die Parseval-Identität(en)

$$\|f\|^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(k)|^2, \quad (f|g) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(k)\overline{\widehat{g}(k)}.$$

Lösungsvorschlag

Sei $\gamma$ eine einfach geschlossene reguläre Kurve in $\mathbb{R}^2$ mit Parametrisierung $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma \in \mathcal{C}^1([a,b])$ mit $\gamma(a) = \gamma(b)$ und $|\dot\gamma(t)| > 0$ für alle $t \in [a,b]$. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die Fläche des von $\gamma$ berandeten Gebiets berechnet werden kann über

$$A = \frac{1}{2}\left|\oint_\gamma \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \cdot \mathrm{d}\vec{s}\right| = \frac{1}{2}\left|\int_a^b (\gamma_1(s)\dot{\gamma_2}(s) - \gamma_2(s)\dot{\gamma_1}(s))\ \mathrm{d}s\right|$$

Nach eventueller Umparametrisierung können wir annehmen, dass die Kurve nach Bogenlänge parametrisiert ist, d.h. $|\dot\gamma(t)| = 1$ für alle $t \in [a,b]$, insbesondere ist dann die Länge der Kurve gegeben durch

$$\ell = \int_a^b |\dot\gamma(t)|\,\mathrm{d}t = b - a.$$

Bis auf Verschiebung können wir daher die Kurve parametrisieren durch $\gamma : [-\frac{\ell}{2}, \frac{\ell}{2}] \to \mathbb{R}^2$ mir $|\gamma'(t)| = 1$ für alle $t \in [-\frac{\ell}{2}, \frac{\ell}{2}]$ und $\gamma(-\ell/2) = \gamma(\ell/2)$.
Durch Umskalieren können wir das Problem etwas vereinfachen: dazu betrachten wir für $\delta > 0$ die Abbildung $S_\delta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $S_\delta(x,y) = (\delta x, \delta y)$. Hat $\gamma$ die Länge $\ell$, so hat $S_\delta(\gamma)$ Länge $\delta\ell$ und die eingeschlossene Fläche ist $\delta^2 A$. Setzen wir also $\delta = \frac{2\pi}{\ell}$, so genügt es zu zeigen, dass für Kurven mit Länge $\ell = 2\pi$ die Ungleichung

$$A \le \pi$$

gilt, mit Gleichheit, wenn $\gamma$ ein Kreis mit Radius eins ist.
Wir betrachten also eine Kurve parametrisiert durch $\gamma : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}^2$, mit

$$|\dot\gamma(t)| = \sqrt{\dot{\gamma_1}(t)^2 + \dot{\gamma_2}(t)^2} = 1, \quad \text{für alle} \quad t \in [-\pi,\pi].$$

Insbesondere gilt also auch

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left(\dot{\gamma_1}(t)^2 + \dot{\gamma_2}(t)^2\right)\ \mathrm{d}t = 1. \tag{2}$$

Da die Kurve geschlossen ist, $\gamma(-pi) = \gamma(\pi)$, ist $\gamma \in \mathcal{C}^1_{\mathrm{per}}([-\pi,\pi])$ und wir können $\gamma_1$ und $\gamma_2$ in Fourierreihen entwickeln,

$$\gamma_1(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt} \tag{3}$$

$$\gamma_2(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} b_k\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt} \tag{4}$$

mit Fourierkoeffizienten $a_k, b_k \in \mathbb{C}$. Da die Funktionen $\gamma_{1,2}$ reellwertig sind, muss gelten (siehe auch Aufgabe 74(c))

$$a_k = \overline{a_{-k}}, \quad b_k = \overline{b_{-k}}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Weiter ist (siehe Aufgabe 72(b))

$$\gamma_1'(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{i}k a_k \,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}, \quad \gamma_2'(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{i}k b_k \,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}.$$

und damit wegen der Parseval-Identität und (2)

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left(\dot{\gamma_1}(t)^2 + \dot{\gamma_2}(t)^2\right)\,\mathrm{d}t = \|\gamma_1'\|^2 + \|\gamma_2'\|^2 \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\mathrm{i}k a_k|^2 + \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\mathrm{i}k b_k| = \sum_{k\in\mathbb{Z}} k^2\left(|a_k|^2 + |b_k|^2\right) \end{aligned} \tag{5}$$

Mit der zweiten Variante der Parsevalschen Identität erhalten wir für die Fläche

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\left|\int_{-\pi}^{\pi} (\gamma_1(s)\dot{\gamma_2}(s) - \gamma_2(s)\dot{\gamma_1}(s))\,\mathrm{d}s\right| = \pi\left|(\gamma_1|\gamma_2') - (\gamma_2|\gamma_1')\right| \\ &= \pi\left|\sum_{k\in\mathbb{Z}} k\left(a_k\overline{b_k} - b_k\overline{a_k}\right)\right| \end{aligned}$$

Mit den einfachen Abschätzungen

$$\left|a_k\overline{b_k} - b_k\overline{a_k}\right| \le 2|a_k||b_k| \le |a_k|^2 + |b_k|^2 \tag{6}$$

und $|n| \le |n|^2$ erhält man dann

$$A \le \pi\sum_{k\in\mathbb{Z}} k\left|a_k\overline{b_k} - b_k\overline{a_k}\right| \le \pi\sum_{k\in\mathbb{Z}} k^2\left(|a_k|^2 + |b_k|^2\right) = \pi,$$

wobei im letzten Schritt Gleichung (5) verwendet wurde.
Um Gleichheit $A = \pi$ zu erreichen, muss wegen $|n| < n^2$, für $|n| \ge 2$

$$\gamma_1(t) = a_{-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t} + a_0 + a_1\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}, \quad \gamma_2(t) = b_{-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t} + b_0 + b_1\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$$

gelten. Da $\gamma_{1,2}$ reellwertig sind, wissen wir außerdem, dass $a_{-1} = \overline{a_1}$ und $b_{-1} = \overline{b_1}$.
Gleichung (5) impliziert nun

$$2(|a_1|^2 + |b_1|^2) = 1,$$

und wegen Gleichheit in (6) muss

$$|a_1| = |b_1| = \frac{1}{2}$$

sein. Wir schreiben

$$a_1 = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}, \quad \text{und} \quad b_1 = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}.$$

Da

$$1 = 2|a_1\overline{b_1} - \overline{a_1}b_1|$$

muss $|\sin(\alpha - \beta)| = 1$, also $\alpha - \beta = \frac{n\pi}{2}$, $k$ ungerade, gelten.
Insgesamt haben wir also

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &= a_0 + \cos(\alpha + t) \\ \gamma_2(t) &= b_0 \pm \sin(\alpha + t), \end{aligned}$$

d.h. $\gamma$ ist ein Kreis mit Radius 1.
Da für einen Kreis mit Radius 1 die Gleichung $A = \pi$ gilt, ist der Beweis damit abgeschlossen.

**Aufgabe 74** (Tutorium)

Sei $f \in \mathcal{C}_{\text{per}}([-\pi,\pi],\mathbb{C})$ mit Fourierkoeffizienten $\hat{f}$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $\widehat{\overline{f}}(k) = \overline{\widehat{f}(-k)}$ für alle $k \in \mathbb{Z}$.

(b) $\widehat{\widetilde{f}}(k) = \widehat{f}(-k)$ für alle $k \in \mathbb{Z}$, wobei $\widetilde{f}(t) := f(-t)$.

(c) Ist $f$ reellwertig und gerade, d.h. $f(-t) = f(t)$ für alle $t \in [-\pi,\pi]$, so sind alle Fourierkoeffizienten rein reell, ist $f$ reellwertig ungerade, d.h. $f(-t) = -f(t)$ für alle $t \in [-\pi,\pi]$, so sind alle Fourierkoeffizienten rein imaginär. Was bedeutet das für die Sinus-/Cosinus-Koeffizienten von $f$?

(d) $\widehat{f(\cdot - y)}(k) = \hat{f}(k)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ky}$ für alle $y \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Lösungsvorschlag

(a) Für $k \in \mathbb{Z}$ gilt nach Definition der Fourierkoeffizienten

$$\begin{aligned}\widehat{\overline{f}}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(t)}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}}\,\mathrm{d}t = \overline{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}\,\mathrm{d}t}\\ &= \overline{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(-k)t}\,\mathrm{d}t} = \overline{\widehat{f}(-k)}.\end{aligned}$$

(b) Es ist

$$\widehat{\widetilde{f}}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \widetilde{f}(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(-t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}\,\mathrm{d}t = \widehat{f}(-k)$$

für alle $k \in \mathbb{Z}$. Dabei wurde die Substitution $t \mapsto -t$ im vorletzten Schritt verwendet.

(c) Da $f$ reellwertig ist, folgt aus (a)

$$\overline{\widehat{f}(k)} = \widehat{\overline{f}}(-k) = \widehat{f}(-k)$$

für alle $k \in \mathbb{Z}$, und damit für gerade Funktionen mit (b) und $f = \widetilde{f}$, dass

$$\operatorname{Im}\widehat{f}(k) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\widehat{f}(k) - \overline{\widehat{f}(k)}\right) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\widehat{f}(k) - \widehat{f}(-k)\right) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\widehat{f}(k) - \widehat{\widetilde{f}}(k)\right) = 0,$$

also $\widehat{f}(k) \in \mathbb{R}$ für alle $k \in \mathbb{Z}$. Analog gilt für ungerade Funktionen $f = -\widetilde{f}$ und damit

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\widehat{f}(k) &= \frac{1}{2}\left(\widehat{f}(k) + \overline{\widehat{f}(k)}\right) = \frac{1}{2}\left(\widehat{f}(k) + \widehat{f}(-k)\right) = \frac{1}{2}\left(\widehat{f}(k) + \widehat{\widetilde{f}}(k)\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\widehat{f}(k) - \widehat{f}(k)\right) = 0,\end{aligned}$$

also $\widehat{f}(k) \in \mathrm{i}\mathbb{R}$ für alle $k \in \mathbb{Z}$.

(d) Sei $y \in \mathbb{R}$. Dann gilt für die verschobene Funktion

$$\begin{aligned}\widehat{f(\cdot - y)}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t-y)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi+y}^{\pi+y} f(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(t+y)}\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi+y}^{\pi+y} f(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ky} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ky} = \widehat{f}(k)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ky}\end{aligned}$$

für alle $k \in \mathbb{Z}$, wobei im vorletzten Schritt die $2\pi$-Periodizität von $f$ ausgenutzt wurde.

**Aufgabe 75** (Tutorium)

Berechnen Sie die Fourier-Koeffizienten der Funktionen $f_j : (-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$, $j = 1, \ldots, 4$, mit

(a) $f_1(t) = \begin{cases} \frac{1}{2a} & \text{für } |t| < a, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ für ein festes $0 < a < \pi$,

(b) $f_2(t) = |\cos(t)|$,

(c) $f_3(t) = t(\pi - |t|)$ und

(d) $f_4(t) = \sin^2(t)$

für jedes $t \in (-\pi, \pi]$. Für welche $t \in (-\pi, \pi]$ konvergiert die jeweilige Fourier-Reihe? In welchen $t \in (-\pi, \pi]$ stellt sie die jeweilige Funktion dar? Ist die Konvergenz gleichmäßig?

Lösungsvorschlag

(a) Da $f_1$ eine gerade Funktion ist, sind die Sinuskoeffizienten $b_k(f_1) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Für $k = 0$ ist

$$a_0(f_1) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(0 \cdot t) f_1(t) \mathrm{d}t = \frac{1}{2a\pi} \int_{-a}^{a} 1 \mathrm{d}t = \frac{1}{\pi},$$

während für $k \in \mathbb{N}$

$$a_k(f_1) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(k \cdot t) f_1(t) \mathrm{d}t = \frac{1}{2a\pi} \int_{-a}^{a} \cos(kt) \mathrm{d}t = \frac{1}{2ak\pi} [\sin(kt)]_{t=-pi}^{t=\pi} = \frac{\sin(ak)}{ak\pi}$$

gilt.

Da für jedes $t_0 \in (-\pi, \pi]$ die Grenzwerte

$$\begin{aligned} \lim_{t \to t_0+} f_1(t) &=: f_1(t_0)+, \\ \lim_{t \to t_0-} f_1(t) &=: f_1(t_0)-, \\ \lim_{h \to 0+} \frac{f_1(t_0 + h) - f_1(t_0)+}{h} &=: f_1'(t_0)+, \\ \lim_{h \to 0-} \frac{f_1(t_0 + h) - f_1(t_0)-}{h} &=: f_1'(t_0)- \end{aligned}$$

existieren, konvergiert die Fourier-Reihe für jedes solche $t_0$ nach Abschnitt 23.6 der Vorlesung gegen $\frac{(f_1(t_0)+)+(f_1(t_0)-)}{2}$. Insbesondere stellt die Fourier-Reihe für jedes $t \in (-\pi, \pi] \setminus \{-a, a\}$ die Funktion $f_1$ dar, da $f_1$ dort stetig ist. Für $t_0 \in \{-a, a\}$ gilt

$$\lim_{N \to \infty} (S_N f_1)(t_0) = \frac{(f_1(t_0)+) + (f_1(t_0)-)}{2} = \frac{1}{4a}.$$

Folglich kann die Konvergenz auch nicht gleichmäßig sein, da die Grenzfunktion unstetig bei $-a$ und $a$ ist.

(b) Da $f_2$ eine gerade Funktion ist, sind die Sinuskoeffizienten $b_k(f_2) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Für $k = 0$ ist

$$\begin{aligned} a_0(f_2) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(0 \cdot t) f_2(t) \mathrm{d}t = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} |\cos(t)| \mathrm{d}t = \frac{2}{\pi} \left( \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) \mathrm{d}t - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos(t) \mathrm{d}t \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \left( [\sin(t)]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} - [\sin(t)]_{t=\frac{\pi}{2}}^{t=\pi} \right) = \frac{4}{\pi}. \end{aligned}$$

Für $a_k(f_2)$ mit $k \in \mathbb{N}$ berechnen wir vorbereitend eine Stammfunktion von

$$\int \underbrace{\cos(t)}_{u'} \underbrace{\cos(kt)}_{v} \mathrm{d}t = \sin(t) \cos(kt) + k \int \sin(t) \sin(kt) \mathrm{d}t$$

Für $k=1$ ist also

$$\int \cos^2(t)\mathrm{d}t = \sin(t)\cos(t) + \int 1-\cos^2(t)\mathrm{d}t \Rightarrow \int \cos^2(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(t+\sin(t)\cos(t)\right),$$

für $k>1$ führt eine weitere partielle Integration auf

$$\begin{aligned}
\sin(t)\cos(kt) + k\int \underbrace{\sin(t)}_{u'}\underbrace{\sin(kt)}_{v}\,\mathrm{d}t &= \sin(t)\cos(kt) + k\left(-\cos(t)\sin(kt) + k\int \cos(t)\cos(kt)\mathrm{d}t\right)\\
\Rightarrow \int \cos(t)\cos(kt)\mathrm{d}t &= \frac{1}{1-k^2}\left(\sin(t)\cos(kt) - k\cos(t)\sin(kt)\right).
\end{aligned}$$

Damit folgt dann für jedes $k>1$

$$\begin{aligned}
a_k(f_2) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\cos(t)|\cos(kt)\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} |\cos(t)|\cos(kt)\mathrm{d}t\\
&= \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\cos(kt)\mathrm{d}t - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos(t)\cos(kt)\mathrm{d}t\right)\\
&= \frac{2}{\pi(1-k^2)}\left(\left[\sin(t)\cos(kt) - k\cos(t)\sin(kt)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[\sin(t)\cos(kt) - k\cos(t)\sin(kt)\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right)\\
&= \frac{2}{\pi(1-k^2)}\left(\cos\left(k\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(k\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{4}{\pi(1-k^2)}\cos\left(k\frac{\pi}{2}\right)\\
&= \begin{cases} 0 & \text{für } k=4m-3\\ \frac{4}{\pi(k^2-1)} & \text{für } k=4m-2\\ 0 & \text{für } k=4m-1\\ \frac{-4}{\pi(k^2-1)} & \text{für } k=4m \end{cases} \qquad (m\in\mathbb{N}).
\end{aligned}$$

Wegen $1=4-3$ und

$$\begin{aligned}
a_1(f_2) &= \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\mathrm{d}t - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^2(t)\mathrm{d}t\right)\\
&= \frac{1}{\pi}\left[t+\sin(t)\cos(t)\right]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} - \left[t+\sin(t)\cos(t)\right]_{t=\frac{\pi}{2}}^{t=\pi} = 0
\end{aligned}$$

gilt die obige Formel für alle $k\in\mathbb{N}$.

Da für jedes $t_0\in(-\pi,\pi]$ die Grenzwerte

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to t_0+} f_2(t) &=: f_2(t_0)+,\\
\lim_{t\to t_0-} f_2(t) &=: f_2(t_0)-,\\
\lim_{h\to 0+} \frac{f_2(t_0+h) - f_2(t_0)+}{h} &=: f_2'(t_0)+,\\
\lim_{h\to 0-} \frac{f_2(t_0+h) - f_2(t_0)-}{h} &=: f_2'(t_0)-
\end{aligned}$$

existieren, konvergiert die Fourier-Reihe für jedes solche $t_0$ nach Abschnitt 23.6 der Vorlesung gegen $\frac{(f_2(t_0)+)+(f_2(t_0)-)}{2}$. Da die periodische Fortsetzung von $f_2$, wegen $f_2(\pi) = \lim_{t\to-\pi+} f_2(t) = 1$, stetig ist, stellt die Fourier-Reihe für jedes $t\in(-\pi,\pi]$ die Funktion $f_2$ dar. Wegen

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k(f_2)| \le \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} < \infty,$$

ist $\widehat{f_2}\in l^1(\mathbb{Z})$ und nach Aufgabe 72(c) konvergiert $(S_N(f_4))_{N\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig.

(c) Da $f_3$ eine ungerade Funktion ist, ist $a_k(f_3) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Für $k \in \mathbb{N}$ berechnen wir mit partieller Integration vorbereitend zwei Stammfunktionen

$$\begin{aligned}
\int \underbrace{t}_{v} \underbrace{\sin(kt)}_{u'} \mathrm{d}t &= -\frac{1}{k} t\cos(kt) + \frac{1}{k} \int \cos(kt)\mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{k} t\cos(kt) + \frac{1}{k^2} \sin(kt), \\
\int \underbrace{t^2}_{v} \underbrace{\sin(kt)}_{u'} \mathrm{d}t &= -\frac{1}{k} t^2 \cos(kt) + \frac{2}{k} \int \underbrace{t}_{v} \underbrace{\cos(kt)}_{u'} \mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{k} t^2 \cos(kt) + \frac{2}{k^2} t\sin(kt) - \frac{2}{k^2} \int \sin(kt)\mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{k} t^2 \cos(kt) + \frac{2}{k^2} t\sin(kt) + \frac{2}{k^3} \cos(kt).
\end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
b_k(f_3) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kt) f_3(t)\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(kt) t(\pi - t)\mathrm{d}t = 2 \int_0^{\pi} t\sin(kt)\mathrm{d}t - \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t^2 \sin(kt)\mathrm{d}t \\
&= 2 \left[ -\frac{1}{k} t\cos(kt) + \frac{1}{k^2} \sin(kt) \right]_{t=0}^{t=\pi} - \frac{2}{\pi} \left[ -\frac{1}{k} t^2 \cos(kt) + \frac{2}{k^2} t\sin(kt) + \frac{2}{k^3} \cos(kt) \right]_{t=0}^{t=\pi} \\
&= (-1)^{k+1} \frac{2\pi}{k} + (-1)^k \frac{2\pi}{k} + \frac{4}{\pi} \frac{1}{k^3} (1 - (-1)^k) = \frac{8}{\pi} \frac{1 - (-1)^k}{2k^3}
\end{aligned}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$.

Da für jedes $t_0 \in (-\pi, \pi]$ die Grenzwerte

$$\begin{aligned}
\lim_{t \to t_0+} f_3(t) &=: f_3(t_0)+, \\
\lim_{t \to t_0-} f_3(t) &=: f_3(t_0)-, \\
\lim_{h \to 0+} \frac{f_3(t_0 + h) - f_3(t_0)+}{h} &=: f_3'(t_0)+, \\
\lim_{h \to 0-} \frac{f_3(t_0 - h) - f_3(t_0)-}{h} &=: f_3'(t_0)+
\end{aligned}$$

existieren, konvergiert die Fourier-Reihe für jedes solche $t_0$ nach Abschnitt 23.6 der Vorlesung gegen $\frac{(f_3(t_0)+)+(f_3(t_0)-)}{2}$. Da die periodische Fortsetzung von $f_3$, wegen $f_3(\pi) = \lim_{t \to -\pi+} f_3(t) = 0$, stetig ist, stellt die Fourier-Reihe für jedes $t \in (-\pi, \pi]$ die Funktion $f_3$ dar. Wegen

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k(f_1)| \le \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} < \infty,$$

ist $\widehat{f_3} \in l^1(\mathbb{Z})$ und nach Aufgabe 72(c) konvergiert $(S_N(f_3))_{N \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig.

(d) Es gilt

$$\sin^2(t) = \frac{1}{2} \sin^2(t) + \frac{1}{2} \sin^2(t) = \frac{1}{2} \sin^2(t) + \frac{1}{2}(1 - \cos^2(t)) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(\cos^2(t) - \sin^2(t)) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2t)$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Da Fourier-Koeffizienten eindeutig bestimmt sind, folgt durch Koeffizientenvergleich, dass $b_k(f_4) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$, $a_0(f_4) = 1$, $a_1(f_4) = 0$, $a_2(f_4) = -\frac{1}{2}$, sowie $a_k(f_4) = 0$ für alle $k > 2$.

Da in diesem Fall die Fourier-Reihe eine endliche Summe ist, konvergiert sie überall (gleichmäßig) gegen $f_4$.

**Aufgabe 76** (Tutorium)

Berechnen Sie die folgenden Reihenwerte mithilfe geeigneter Fourierreihen.

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{4k^2-1}$

(b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}$

HINWEIS: Aufgabe 75 und Parseval-Identität.

LÖSUNGSVORSCHLAG

(a) Nach Aufgabe 70(b) gilt

$$|\cos(t)| = \frac{a_0(f_2)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(f_2)\cos(kt) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{4k^2-1}\cos(2kt)$$

für alle $t \in (-\pi, \pi)$. Einsetzen von $t = 0$ und auflösen liefert den gesuchten Reihenwert

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{4k^2-1} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$$

(b) Nach Abschnitt 23.6 der Vorlesung (Beispiel 2) lauten die Fourier-Koeffizienten der Funktion $f : (-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$, definiert durch $f(t) = t^2$ gerade

$$\widehat{f}(0) = \frac{\pi^2}{3}, \quad \widehat{f}(k) = 2\frac{(-1)^k}{k^2},$$

für alle $k \in \mathbb{Z}$. Nach der Parsevalschen Gleichung (vgl. Abschnitt 23.7 Satz 2) der Vorlesung gilt

$$\|f\|_2^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(k)|^2.$$

Einsetzen von

$$\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^4 \,\mathrm{d}t = \frac{\pi^4}{5},$$

sowie der obigen Fourier-Koeffizienten liefert

$$\begin{aligned}\frac{\pi^4}{5} &= \frac{\pi^4}{9} + 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4} + 4\sum_{k=-\infty}^{-1}\frac{1}{k^4}\\ &= \frac{\pi^4}{9} + 8\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4},\end{aligned}$$

wodurch sich durch Auflösen

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

ergibt.