Karlsruher Institut für Technologie

**Institut für Analysis**
Prof. Dr. Dirk Hundertmark
Dr. Michal Jex

SS2017/18
23.4.2018

# Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

## 1. Übungsblatt

**Aufgabe 1:**
Sei $V = \{x > 0 | x \in \mathbb{R}\}$ eine Menge und $T = \mathbb{R}$ ein Körper. Für alle $x, y \in V$ und $\alpha \in T$ sei

$$\begin{aligned} x \oplus y &= x \cdot y\,, \\ \alpha \odot x &= x^{\alpha}\,. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass $V$ mit diesen Verknüpfungen $\oplus : V \times V \to V$ und $\odot : T \times V \to V$ ein Vektorraum ist.

**Aufgabe 2:**
Seien $V_i \subset \mathbb{C}^3$ Mengen mit folgenden Eigenschaften:

(a) $x_1 \in \mathbb{R}$,

(b) $x_1 = 0$,

(c) $x_1 = 0 \vee x_2 = 0$,

(d) $x_1 + 2x_2 = 0$,

(e) $x_1 + 3x_2 = 1$,

(f) $x_1 = x_2 \wedge x_1 \neq x_3$,

(g) $x_1 = x_2$,

(h) $x_1 \neq x_2$.

Welche dem Mengen $V_i$, mit standard Verknüpfungen im $\mathbb{C}^3$, sind Vektorräume?

**Aufgabe 3:**
Sei $V = \{\text{reelle Polynomen in einer reellen Variablen}\} = \{p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,|\, p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n, n \in \mathbb{N}_0, a_i \in \mathbb{R}\}$. Definiere $D : V \to V$ durch $(D(p))(x) = p'(x)$ und $J : V \to V$ durch $(J(p))(x) = \int_0^x p(t)dt$. Zeigen Sie

1. V ist ein Vektorraum.
2. $D$ und $J$ sind linear.
3. $DJ = \mathbb{I}_V$. Was ist $JD$? ($\mathbb{I}_V$ : Identität auf $V$)
4. Ist $J$ oder $D : V \to V$ invertierbar?

**Aufgabe 4:**
Seien $a, b \in \mathbb{R}^d$ ($d \times 1$ Matrizen). Dann ist $b^t := (b_1, b_2, \ldots, b_d)$ eine $1 \times d$ Matrix. Berechnen Sie die Matrix $C = a \cdot b^t$. Zeigen Sie, dass $\langle b, x\rangle a = Cx$, wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ Euklidisches Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^d$ ist.

**— Bitte wenden! —**

**Aufgabe 5:**
Sei $d \in \mathbb{N}$. Ist der Raum der Polynomen von Grad $d$ ein Vektorraum?

**Aufgabe 6:** *Lineare (Un)Abhängigkeit*
Gegeben sei der Vektorraum der Funktionen $f$ auf $\mathbb{R}$ (d.h. alle Funktionen $x \to f(x), x \in \mathbb{R}$). In diesem seien die Funktionen $\cos : x \to \cos(x)$, $\sin : x \to \sin(x)$, $g : x \to \exp(x)$ und $h : x \to \exp(ix)$ gegeben.

1. Zeigen Sie, dass sin und cos linear unabhängig sind.

2. Zeigen Sie, dass $g$ und cos linear unabhängig sind.

3. Sind die Funktionen sin, cos und $h$ linear unabhängig, wenn wir nur Linearkombinationen mit reellen Koeffizienten zulassen? Wie ist es, wenn wir komplexe Koeffizienten benutzen?

**Aufgabe 7:**
Sei $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben duch Matrixmultiplikation mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$b = \begin{pmatrix} 31 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} .$$

In Matrixnotation wollen wir $Lx = b$ lösen, d.h.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} .$$

Man schreibe diese als

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 31 \\ 0 & 1 & -1 & 6 \\ 1 & 0 & 1 & 7 \end{array} \right)$$

und löse diese durch Zeilentransformationen.

**Aufgabe 8:**
Sind Sie die folgende Räume Vektorräume?

1. $\mathbb{R}$ über dem Körper $\mathbb{Q}$ mit standard Verknüpfungen,

2. $\mathbb{Q}$ über dem Körper $\mathbb{R}$ mit standard Verknüpfungen.

**Hinweis:** In der großen Saalübung werden voraussichtlich die Aufgaben 1, 3, 5 und 7 besprochen. Die restlichen Aufgaben werden in den Tutorien behandelt.