Institut für Analysis
Prof. Dr. Dirk Hundertmark
Dr. Michal Jex

SS2017/18
30.4.2018

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

2. Übungsblatt

Aufgabe 9:
Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & \alpha \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} \alpha \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie in Abhängigkeit von α eine Basis von Bild(A) und Kern(A), sowie alle Lösungen $x \in \mathbb{R}^3$ der Gleichung $Ax = b$.

Aufgabe 10:
Sei Pol_4 ein Vektorraum reellen Polynomen von Grad ≤ 3 mit zwei verschiedene Basen $(1, x, x^2, x^3)$ und $(1, x, (x-1)^2, (x-3)^2)$. Seien $a = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ Koordinaten in $\mathbb{R}^4$, so dass

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 = p(x) = b_0 + b_1 x + b_2 (x-1)^2 + b_3 (x-1)^3 .$$

1. Finden Sie ein 4×4 Matrix A, so dass $b = Aa$.

2. Finden Sie ein 4×4 Matrix B, so dass $a = Bb$.

3. Sind A und B invertierbar? Was ist AB und BA? Bestimmen Sie A^{-1} und B^{-1}.

Aufgabe 11: Seien $\{a, b, c\}$ lineare unabhängige Vektoren im Vektorraum V über dem Körper $\mathbb{R}$. Sind die Vektoren $\{a - 2b + c, 4a - b - c, 4a + 13b - 11c\}$ linear unabhängig?

Aufgabe 12: Seien $\{a, b, c\}$ linear unabhängige Vektoren im Vektorraum $\mathbb{C}^3$. Sind die Vektoren x und z in Vector Hülle $\mathrm{Lin}_{\mathbb{C}}(a, b, c)$?

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 7 \\ -8 \\ 7 \end{pmatrix}, \qquad c = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad x = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix}, \qquad z = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 13: Seien $\{a, b, c\}$ Vektoren im $\mathbb{R}^3$. Finden Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$ so dass $x \in \mathrm{Lin}_{\mathbb{R}}(a, b, c)$.

1. $a = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad c = \begin{pmatrix} -5 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix}.$

2. $a = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad c = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ \alpha \end{pmatrix}, \qquad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}.$

— **Bitte wenden!** —

3. $a = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} , \qquad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} , \qquad c = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} , \qquad x = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ \alpha \end{pmatrix} .$

4. $a = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} , \qquad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} , \qquad c = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} , \qquad x = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ 2\alpha + 1 \end{pmatrix} .$

Aufgabe 14: Seien $\{q_1, q_2, q_3\}$ Vektoren im Vektorraum Pol_5, so dass

$$q_1(x) = 1 + 4x - 2x^2 + 3x^3 + x^4, \vec{q}_2(x) = 2 + 4x - 3x^2 - 2x^3 + 3x^4, q_3(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + 11x^4 .$$

Für welche $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ sind Vektoren $\{q_1, q_2, q_3\}$ lineare abhängig.
Hinweis: Sei ein Polynom p so $p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$, dass $p(x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$, dann folgt $a_0 = a_1 = \ldots = a_n = 0$.

Hinweis: In der großen Saalübung werden voraussichtlich die Aufgaben 9, 10 und 11 besprochen. Die restlichen Aufgaben werden in den Tutorien behandelt.