Institut für Analysis
Prof. Dr. Dirk Hundertmark
Dr. Michal Jex

SS2017/18
7.5.2018

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

3. Übungsblatt

Aufgabe 15: Seien $\{a, b, c\}$ lineare unabhängige Vektoren im Vektorraum V über dem Körper $\mathbb{R}$. Finden Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$ so, dass $\{a + \alpha b - c, 2a - 2b + c, \alpha a + b\}$ eine Basis in V ist.

Aufgabe 16: Seien $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ linear unabhängige Vektoren im Vektorraum $\mathbb{C}^4$. Finden Sie eine Basis von $Lin_{\mathbb{C}}(a, b, c)$ so, dass

1. der Vektor $x = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$ zur Basis gehört,

2. die Vektoren $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ zur Basis gehören.

Aufgabe 17: Sei M ein Untervektorraum im Vektorraum $\mathbb{C}^3$. Finden Sie ein Basis und Dimension von M, wenn

1. $M = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 \middle| a_1 - 2a_2 + a_3 = 0 \right\}$,

2. $M = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 \middle| a_1 - 2a_2 + a_3 = 0 \,\text{und}\, a_1 - a_3 = 0 \right\}$.

Aufgabe 18:

1. Seien P und Q zwei Untervektoräumen im Vektorraum V. Wir definieren $P + Q = \{u + v | u \in P, v \in Q\}$ (die Summe) und $P \cap Q = \{u | u \in P, u \in Q\}$ (der Schnitt). Zeigen Sie $P + Q$ und $P \cap Q$ sind Untervektoräumen im Vektorraum V.

2. Sei $V = \mathbb{R}^3$ mit Standardbasis (e_1, e_2, e_3), $P = Lin_{\mathbb{R}}(e_1)$ und $Q = Lin_{\mathbb{R}}(e_2)$. Was sind $P + Q$ und $P \cap Q$?

3. Seien P und Q zwei Untervektoräumen im Vektorraum $\mathbb{R}^3$. Finden Sie eine Basis und die

— Bitte wenden! —

Dimension für $P+Q$, wenn

$$\begin{aligned} P &= Lin_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\\3\end{pmatrix}\right), \\ Q &= Lin_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}\right). \end{aligned}$$

Aufgabe 19:

1. Seien P und Q zwei Untervektoräumen im Vektorraum $\mathbb{R}^4$. Finden Sie eine Basis und die Dimension für $P \cap Q$, wenn

$$\begin{aligned} P &= \left\{ \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\\a_4\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \middle| a_2 + 3a_3 + a_4 = 0 \,\text{und}\, 2a_1 + a_2 + 3a_3 - a_4 = 0 \right\}, \\ Q &= \left\{ \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\\a_4\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \middle| -2a_1 + a_2 + 5a_3 + 5a_4 = 0 \,\text{und}\, 4a_1 + 3a_2 + 5a_3 - 5a_4 = 0 \right\}. \end{aligned}$$

2. Finden Sie eine Basis und die Dimension für $P+Q$.
   Hinweis: Denken Sie an Aufgabe 18. Welche Information über P und Q muss man haben um eine Basis für $P+Q$ einfach zu finden.

Hinweis: In der großen Saalübung werden voraussichtlich die Aufgaben 18 und 19 besprochen. Die restlichen Aufgaben werden in den Tutorien behandelt.