zu 15) $\dim V \geq 3$ weil 3 lin. unabhängige Vektoren existieren.

$\Rightarrow$ eine Basis muss am mindestens 3 lin unabhängige Vektoren haben.

$$\alpha_1(a+\alpha b-c)+\alpha_2(2a-2b+c)+\alpha_3(\alpha a+b)=0$$

$$a(\alpha_1+2\alpha_2+\alpha\alpha_3)+b(\alpha_1\alpha-2\alpha_2+\alpha_3)+c(-\alpha_1+\alpha_2)=0$$

$+1\times$ $-\alpha\times$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & \alpha & 0 \\ \alpha & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & \alpha & 0 \\ 0 & 3 & \alpha & 0 \\ 0 & 2(\alpha+1) & -\alpha^2+1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & \alpha & 0 \\ 0 & 3 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & -3\alpha^2+3+2\alpha^2+2\alpha & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & \alpha & 0 \\ 0 & 3 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^2-2\alpha-3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & \alpha & 0 \\ 0 & 3 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & (\alpha-3)(\alpha+1) & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \alpha \neq -1, 3$$

Au 16)

1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ -5 & 2 & 0 & -1 \\ -4 & 3 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & 5 & 14 \\ 0 & 7 & 5 & 14 \\ 0 & -2 & -6 & 16 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & -16 & 44 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Downarrow$

Basis: Vektoren x, a, b oder x, a, c

2) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 4 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 4 & 2 & -2 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$\Downarrow$

Basis: Vektoren x, y, a oder x, y, b

Au 17)

1) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Basis (v_1, v_2)

Dimension 1

2) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Basis (v_3)

Dimension 1

Au 18) Menge $M \subset V$ Untervektorraum im $V \Leftrightarrow \oplus : M \times M \to M$ abgeschlossen $\wedge$

$\odot : T \times M \to M$ abgeschlossen

1) $P + Q = R$

$\oplus : R \times R \to R : a, b \in R \overset{\text{Definition von } R}{\Longrightarrow} \exists a_P, b_P \in P, a_Q, b_Q \in Q : a_P \oplus a_Q = a, b_P \oplus b_Q = b$

$\underset{P,Q \text{ Vektorraum}}{\Longrightarrow} a_P \oplus b_P \in P, a_Q \oplus b_Q \in Q \underset{\text{Definition von } R}{\Longrightarrow} a \oplus b \in R \Rightarrow \oplus$ abgeschlossen

$\odot : T \times R \to R : \alpha \in T, a \in R \overset{\text{Definition von } R}{\Longrightarrow} a_P \in P, a_Q \in Q \underset{P,Q \text{ Vektorraum}}{\Longrightarrow} \alpha \odot a_P \in P, \alpha \odot a_Q \in Q \underset{\text{Definition von } R}{\Longrightarrow} \alpha \odot a \in R \Rightarrow$

$\Rightarrow \odot$ abgeschlossen

$P \cap Q = R$

$\oplus : R \times R \to R : a, b \in R \overset{\text{Def } R}{\Longrightarrow} a, b \in P; a, b \in Q \overset{P,Q \text{ V.R.}}{\Longrightarrow} a + b \in P, a + b \in Q \overset{\text{Def } R}{\Longrightarrow} a + b \in R \Rightarrow$

$\Rightarrow \oplus$ abgeschlossen

$\odot : T \times R \to R : \alpha \in T, a \in R \overset{\text{Def } R}{\Longrightarrow} a \in P, a \in Q \overset{P,Q \text{ V.R.}}{\Longrightarrow} \alpha \odot a \in P, \alpha \odot a \in Q \overset{\text{Def } R}{\Longrightarrow} \alpha \odot a \in R \Rightarrow$

$\Rightarrow \odot$ abgeschlossen

2) $P = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \alpha \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \alpha \in \mathbb{R} \right\}$ $\quad Q = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \beta \in \mathbb{R} \right\}$

$P + Q = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Lin}_{\mathbb{R}}(e_1, e_2)$

$\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{matrix} \Rightarrow P \cap Q = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

3) $P = \mathrm{Lin}_{\mathbb{R}}(a, b, c) \quad Q = \mathrm{Lin}_{\mathbb{R}}(d, e, f) \Rightarrow P + Q = \mathrm{Lin}_{\mathbb{R}}(a, b, c, d, e, f)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

Basis: $a \cup (b$ oder $c) \cup (d$ oder e oder $f)$ Dimension 3 Basis (a, b, d)

Aw 19)

1) $P \cap Q = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; a_2 + 3a_3 + a_4 = 0 \wedge 2a_1 + a_2 + 3a_3 - a_4 = 0 \wedge -2a_1 + a_2 + 5a_3 + 5a_4 = 0 \wedge 4a_1 + 3a_2 + 5a_3 - 5a_4 = 0 \right\}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 5 & 5 \\ 4 & 3 & 5 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 8 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in P \cap Q \Rightarrow P \cap Q = \mathrm{Lin}_{\mathbb{R}}(v)$$

2) Basis P: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow p_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad p_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad P = \mathrm{Lin}_{\mathbb{R}}(p_1, p_2)$

Basis Q: $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 & -5 \\ -2 & 1 & 5 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 & -5 \\ 0 & 5 & 15 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow q_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad q_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad Q = \mathrm{Lin}_{\mathbb{R}}(q_1, q_2)$

$P + Q = \mathrm{Lin}_{\mathbb{R}}(p_1, p_2, q_1, q_2)$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Basis } P+Q: \begin{matrix} (p_1, p_2, q_1) \\ (p_1, p_2, q_2) \end{matrix}$$