Institut für Analysis
Prof. Dr. Dirk Hundertmark
Dr. Michal Jex

SS2017/18
21.5.2018

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

5. Übungsblatt

Aufgabe 25:
Bestimmen Sie alle Lösungen $\vec{z} = (z_1, z_2, z_3)^T \in \mathbb{C}^3$ des folgenden linearen Gleichungssystems:

$$\begin{array}{ccccccc} 2z_1 & + & (1+2\mathrm{i})z_2 & + & (3+\mathrm{i})z_3 & = & 2-\mathrm{i} \\ & & z_2 & + & 2z_3 & = & -1 \\ z_1 & + & (1+\mathrm{i})z_2 & + & 2z_3 & = & 0 \\ z_1 & + & \mathrm{i}z_2 & & & = & 1 \end{array}$$

Aufgabe 26:
Bestimmen Sie alle Lösungen $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$ des folgenden linearen Gleichungssystems:

$$\begin{array}{ccccccc} 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 6x_2 & + & 8x_3 & = & 3 \\ 6x_1 & + & 8x_2 & + & 18x_3 & = & 5 \end{array}$$

Aufgabe 27:

1. Sei Pol_5 der Vektorraum der reellen Polynomen von Grad ≤ 4 mit der Basis $p_0(x) = 1, p_j(x) = \binom{x+j}{j} = \frac{(x+1)\dots(x+j)}{j!}$, $j = 1, \dots, 4$ und sei $p(x) = \sum_{j=0}^{4} m_j p_j(x)$. Zeigen Sie die folgende Aussage
$$p(n) \in \mathbb{Z} \forall n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow m_0, m_1, \dots, m_4 \in \mathbb{Z}\,.$$
2. Was kann man über Polynomen von Pol_n, $n \in \mathbb{N}$ sagen?

Aufgabe 28: Seien A_n und B_n $n \times n$-Matrizen, A_m und B_m $m \times m$-Matrizen und sei $0_{n,m}$ die $n \times m$-Nullmatrix. Zeigen Sie die folgende Aussage

$$\begin{pmatrix} A_n & 0_{n,m} \\ 0_{m,n} & A_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_n & 0_{n,m} \\ 0_{m,n} & B_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_n B_n & 0_{n,m} \\ 0_{m,n} & A_m B_m \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 29: Zeigen Sie, dass das Produkt von zwei unteren Dreiecksmatrizen ein untere Dreiecksmatrix ist und dass das Produkt von zwei oberen Dreiecksmatrizen ein obere Dreiecksmatrix ist.
Hinweis: $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ ist eine untere Dreiecksmatrix, wenn $a_{ij} = 0$ für $i < j$.
$A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ ist eine obere Dreiecksmatrix, wenn $a_{ij} = 0$ für $i > j$.

— Bitte wenden! —

Aufgabe 30: Sei ein Abbildung $A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definiert durch die Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Finden Sie $\mathrm{kern}(A - \lambda I)$, $\mathrm{kern}((A - \lambda I)^2)$ und $\mathrm{kern}((A - \lambda I)^3)$.

Aufgabe 31: Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & \alpha & 2 & -2 \end{pmatrix} .$$

Bestimmen Sie in Abhängigkeit von α eine Basis von $\mathrm{Bild}(A)$, $\mathrm{Kern}(A)$ und alle Vektoren $b \in \mathbb{R}^4$ so, dass die Gleichung $Ax = b$ keine Lösung hat.

Hinweis: In der großen Saalübung werden voraussichtlich die Aufgaben 27, 30 und 31 besprochen. Die restlichen Aufgaben werden in den Tutorien behandelt.