Auf 25)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1+2i & 3+i & 2-i \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1+i & 2 & 0 \\ 1 & i & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & i & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3+i & -i \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & i & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1+i & 1-i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & i-1 \\ 0 & 1 & 0 & -1-2i \\ 0 & 0 & 1 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l} w_1 = i-1 \\ w_2 = -1-2i \\ w_3 = -i \end{array}$$

Auf 26)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 8 & 3 \\ 6 & 8 & 18 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 5 & 2 \\ 0 & 5 & 9 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & \frac{3}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{10} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Auf 27) 1.

$\Leftarrow$:

Wir zeigen, dass $p_j(n) \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}$

$n \geq 0$: $p_j(n) = \binom{n+j}{j} \in \mathbb{N}$ HM1 - Auf 3c

$n < 0$: $-n > j$: $p_j(-\tilde{n}) = \frac{(-\tilde{n}+1) \cdot \ldots \cdot (-\tilde{n}+j)}{j!} = \frac{(-1)^j (\tilde{n}-1) \cdot \ldots \cdot ((\tilde{n}-1)-(j-1))}{j!} = (-1)^j \binom{\tilde{n}-1}{j}$

$\tilde{n} = -n$

$\binom{\tilde{n}-1}{j} \in \mathbb{N}$ weil $\tilde{n}-1 \geq j$

$n \in \{-1, \ldots, -j\}$: Ein Klammer von $(n+1), \ldots, (n+j)$ ist 0

Dann haben wir $p_j(n) \in \mathbb{Z}$, $m_j \in \mathbb{Z} \Rightarrow p_j(n) m_j \in \mathbb{Z} \Rightarrow \sum_j p_j(n) m_j \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow$: $p_j(-1) = \begin{cases} 0 & j \geq 1 \\ 1 & j = 0 \end{cases}$ $p_j(-3) = \begin{cases} 0 & j \geq 3 \\ 1 & j = 2 \\ -2 & j = 1 \\ 1 & j = 0 \end{cases}$

$p_j(-2) = \begin{cases} 0 & j \geq 2 \\ -1 & j = 1 \\ 1 & j = 0 \end{cases}$ $p_j(-4) = \begin{cases} 0 & j \geq 4 \\ -1 & j = 3 \\ 3 & j = 2 \\ -3 & j = 1 \\ 1 & j = 0 \end{cases}$ wichtig : $p_j(-n) = 0$ $j > n > 0$

$p_j(-j-1) = (-1)^j$

$\mathbb{Z} \ni p(-1) = m_0 p_0(-1) = m_0 \Rightarrow m_0 \in \mathbb{Z}$

$\mathbb{Z} \ni p(-2) = m_0 p_0(-2) + m_1 p_1(-2) = m_0 - m_1 \Rightarrow m_1 \in \mathbb{Z}$

$\mathbb{Z} \ni p(-3) = m_0 p_0(-3) + m_1 p_1(-3) + m_2 p_2(-3) = m_0 - 2m_1 + m_2 \Rightarrow m_2 \in \mathbb{Z}$

$\mathbb{Z} \ni p(-4) = m_0 p_0(-4) + m_1 p_1(-4) + m_2 p_2(-4) + m_3 p_3(-4) = m_0 - 3m_1 + 3m_2 - m_3 \Rightarrow m_3 \in \mathbb{Z}$

2. die Aussage ist wahr : $l \in \mathbb{N}$ $\sum_{j=0}^{l} m_j p_j(x) \in \mathbb{Z}$ für $x \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow m_0, \ldots, m_l \in \mathbb{Z}$

Auf 28)

$$A = \begin{pmatrix} A_n & 0_{n,m} \\ 0_{m,n} & A_m \end{pmatrix} \qquad A_{jk} \neq 0 \iff (j < n \land k \leq n) \lor (j > n+1 \land k > n+1)$$

$$B = \begin{pmatrix} B_n & 0_{n,m} \\ 0_{m,n} & B_m \end{pmatrix} \qquad B_{jk} \neq 0 \iff (j < n \land k < n) \lor (j > n+1 \land k > n+1)$$

$$(AB)_{jk} = \sum_{l=1}^{n+m} A_{jl} B_{lk} = \sum_{l=1}^{n} A_{jl} B_{lk} + \sum_{l=n+1}^{n+m} A_{jl} B_{lk} = \begin{cases} \sum_{l=1}^{n} A_{jl} B_{lk} & j < n \\ \sum_{l=n+1}^{n+m} A_{jl} B_{lk} & j > n+1 \end{cases}$$

$$\sum_{l=1}^{n} A_{jl} B_{lk} = 0 \qquad k > n$$

$$\sum_{l=n+1}^{n+m} A_{jl} B_{lk} = 0 \qquad k < n+1$$

$$\Rightarrow AB = \begin{pmatrix} A_n B_n & 0_{n,m} \\ 0_{m,n} & A_m B_m \end{pmatrix}$$

Auf 29) $AB = C \iff B^T A^T = C^T$

A_{jk} Zeile Spalte

A, B obere Dreiecksmatrizen $\iff A_{jk}, B_{jk} = 0 \quad j > k$

Wir müssen zeigen $C_{jk} = 0 \quad j \leq k$

$$C_{jk} = \sum_{l=1}^{n} A_{jl} B_{lk} = \sum_{l=1}^{j-1} \underbrace{A_{jl}}_{0 \text{ weil } j>l} B_{lk} + \sum_{l=j}^{n} A_{jl} B_{lk} = \sum_{l=j}^{n} A_{jl} \underbrace{B_{lk}}_{0 \text{ für } j>k} = 0 \quad \text{für } j>k$$

Auf 30)

$$(A-\lambda I) \sim \begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

$\nearrow \lambda \neq 3 \quad \ker(A-\lambda I) = 0$

$\searrow \lambda = 3 \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \ker(A-3I) = \mathrm{Lin}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 0\\0\\0\\1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\0\\0\\0 \end{pmatrix} \right)$

$$(A-\lambda I)^2 \sim \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix}^2 & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \end{matrix} & (3-\lambda)^2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} (3-\lambda)^2 & 2(3-\lambda) & 1 & 0 \\ 0 & (3-\lambda)^2 & 2(3-\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & (3-\lambda)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (3-\lambda)^2 \end{pmatrix}$$

benutzen Auf 28,29

$\nearrow \lambda \neq 3 \quad \ker(A-\lambda I) = 0$

$\searrow \lambda = 3 \quad *$

$$* \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \ker\left((A-3I)^2\right) = \mathrm{Lin}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 0\\1\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\0\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\1 \end{pmatrix} \right)$$

$$(A-\lambda I)^3 \sim \begin{pmatrix} (3-\lambda)^3 & 3(3-\lambda)^2 & 3(3-\lambda) & 0 \\ 0 & (3-\lambda)^3 & 3(3-\lambda)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (3-\lambda)^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (3-\lambda)^3 \end{pmatrix}$$

$\nearrow \lambda \neq 3 \quad \ker(A-\lambda I) = 0$

$\searrow \lambda = 3 \quad (A-\lambda I)^3 = 0 \Rightarrow \ker(A-\lambda I)^3 = \mathbb{R}^4$

Auf 31)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 & b_1 \\ 2 & 0 & -1 & 2 & b_2 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & b_3 \\ -1 & \alpha & 2 & -2 & b_4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 & b_1 \\ 0 & 4 & -3 & 2 & -2b_1+b_2 \\ 0 & 7 & -1 & 1 & b_3-2b_1 \\ 0 & \alpha-2 & 3 & -2 & b_1+b_4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 & b_1 \\ 0 & 7 & -1 & 1 & b_3-2b_1 \\ 0 & -10 & 1 & 0 & b_2-2b_3+2b_1 \\ 0 & \alpha+2 & 0 & 0 & -b_1+b_2+b_4 \end{array}\right)$$

$\alpha \neq -2 \Rightarrow$ Bild $A = \mathbb{R}^4$, Kern $A = 0$ Lösung existiert für alle b

$\alpha = 2 \Rightarrow$ Bild $A = \mathrm{Lin}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$, Kern $A = \mathrm{Lin}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -8 \\ 1 \\ 10 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$

Lösung existiert nicht für $M = \left\{ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; -b_1+b_2+b_4 \neq 0 \right\}$