Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Prof. Dr. Dirk Hundertmark
Dr. Michal Jex

SS2017/18
28.5.2018

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

6. Übungsblatt

Aufgabe 32:
Sei $\vec{y} \in \mathbb{R}^3 \setminus \left\{\vec{0}\right\}$ fest. Wir definieren

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad T\vec{x} = \vec{x} \times \vec{y} := (x_2 y_3 - x_3 y_2, x_3 y_1 - x_1 y_3, x_1 y_2 - x_2 y_1)\,.$$

Berechnen Sie für die lineare Abbildung T:

(a) die transponierte T^t,

(b) den Kern(T) und

(c) das Bild(T).

Aufgabe 33:
Seien $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \in \mathbb{R}^3$ und $\langle x, y\rangle = \sum_{j=1}^{3} x_j y_j$. Zeigen Sie

(a) die *Graßmann-Identität*

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}\langle \vec{a}, \vec{c}\rangle - \vec{c}\langle \vec{a}, \vec{b}\rangle,$$

(b) die *Jacobi-Identität*

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = 0,$$

(c) sowie die *Lagrange-Identität*

$$\left\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \times \vec{d} \right\rangle = \langle \vec{a}, \vec{c}\rangle\langle \vec{b}, \vec{d}\rangle - \langle \vec{b}, \vec{c}\rangle\langle \vec{a}, \vec{d}\rangle.$$

Aufgabe 34:
Betrachten Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & 2 \end{pmatrix}\,.$$

(a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte λ von A und ihre algebraischen Vielfachheiten $m_a(\lambda)$.

(b) Bestimmen Sie für alle Eigenwerte λ ihre geometrische Vielfachheit $m_g(\lambda)$, sowie den zugehörigen Eigenraum $E_A(\lambda)$.

(c) Ist A diagonalisierbar? Geben Sie ggf. eine reguläre Matrix S an, mit der $S^{-1}AS$ Diagonalgestalt hat.

— **Bitte wenden!** —

Aufgabe 35:
Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 15 \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 35 \\ 1 & 5 & 15 & 35 & 70 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{5\times 5}.$$

Aufgabe 36:

(A) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine $n \times n$ Matrix, $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ eine $m \times n$ Matrix, $C \in \mathbb{R}^{n\times m}$ eine $n \times m$ Matrix und $D \in \mathbb{R}^{m\times m}$ eine invertierbare Matrix. Ferner sei M die Blockmatrix

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad .$$

Zeigen Sie:

(a) $\det(M) = \det(D)\det(A - BD^{-1}C)$,

(b) Sei $CD = DC$, dann $\det(M) = \det(AD - BC)$.

(B) *Sylvester Determinant-Identität* $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ eine $m \times n$ Matrix, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ eine $n \times m$ Matrix und I_k eine $k \times k$ Identitätmatrix. Dann gilt $\det(I_m + AB) = \det(I_n + BA)$.

Aufgabe 37:

(a) Sei $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & a & 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & d & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 & d & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix} \quad .$$

(b) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $x_j \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$B_n(z) = \begin{pmatrix} 0 & x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ x_2 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ x_n & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad .$$

Hinweis: In der großen Saalübung werden voraussichtlich die Aufgaben 32, 34 und 36 besprochen. Die restlichen Aufgaben werden in den Tutorien behandelt.