Institut für Analysis
Prof. Dr. Dirk Hundertmark
Dr. Michal Jex

SS2017/18
1.6.2018

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 06. Übungsblatt

Aufgabe 32:

(a) Seien $\vec{x}, \vec{z} \in \mathbb{R}^3$. Es gilt:

$$(T\vec{x}|\vec{z}) = (\vec{x} \times \vec{y}|\vec{z}) = \det(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = -\det(\vec{z}, \vec{y}, \vec{x}) = -(\vec{z} \times \vec{y}|\vec{x}) = (\vec{x}| - T\vec{z}) = (\vec{x}|T^t\vec{z})$$

Also ist $T^t = -T$.

(b) Nach der Vorlesung gilt für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$

$$0 = T\vec{x} = \vec{x} \times \vec{y} \Leftrightarrow \vec{x}, \vec{y} \text{ linear abhängig},$$

also ist $\mathrm{Kern}(T) = \mathrm{lin}(\{\vec{y}\})$.

(c) Nach der Vorlesung gilt $\mathrm{Bild}(T) = \mathrm{Kern}(T^t)^\perp$. Mit (a) und (b) folgt

$$\mathrm{Bild}(T) = \mathrm{Kern}(T)^\perp = \mathrm{lin}(\{\vec{y}\})^\perp = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : (\vec{x}|\vec{y}) = 0\right\}.$$

Aufgabe 33:

(a) Seien

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}.$$

Wir rechnen „zu Fuß“ nach:

$$\begin{aligned}
\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) &= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \left(\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_2c_3 - b_3c_2 \\ b_3c_1 - b_1c_3 \\ b_1c_2 - b_2c_1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_2(b_1c_2 - b_2c_1) - a_3(b_3c_1 - b_1c_3) \\ a_3(b_2c_3 - b_3c_2) - a_1(b_1c_2 - b_2c_1) \\ a_1(b_3c_1 - b_1c_3) - a_2(b_2c_3 - b_3c_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1(a_2c_2 + a_3c_3) - c_1(a_2b_2 + a_3b_3) \\ b_2(a_1c_1 + b_3c_3) - c_2(a_1b_1 + a_3b_3) \\ b_3(a_1c_1 + a_2c_2) - c_3(a_1b_1 + a_2b_2) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} b_1(a_2c_2 + a_3c_3) - c_1(a_2b_2 + a_3b_3) \\ b_2(a_1c_1 + b_3c_3) - c_2(a_1b_1 + a_3b_3) \\ b_3(a_1c_1 + a_2c_2) - c_3(a_1b_1 + a_2b_2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1b_1c_1 \\ a_2b_2c_2 \\ a_3b_3c_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1b_1c_1 \\ a_2b_2c_2 \\ a_3b_3c_3 \end{pmatrix} \\
&= (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \vec{b}\langle\vec{a}, \vec{c}\rangle - \vec{c}\langle\vec{a}, \vec{b}\rangle
\end{aligned}$$

□

(b) Die Aussage folgt direkt aus (a):

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) \overset{\text{(a)}}{=} \vec{b}\langle\vec{a}, \vec{c}\rangle - \vec{c}\langle\vec{a}, \vec{b}\rangle + \vec{c}\langle\vec{b}, \vec{a}\rangle - \vec{a}\langle\vec{b}, \vec{c}\rangle + \vec{a}\langle\vec{c}, \vec{b}\rangle - \vec{b}\langle\vec{c}, \vec{a}\rangle = 0$$

□

(c) Es gilt:

$$\left\langle \vec{a}\times\vec{b}, \vec{c}\times\vec{d} \right\rangle = \det(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\times\vec{d}) = \det(\vec{b},\vec{c}\times\vec{d},\vec{a}) = \langle \vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{d}),\vec{a}\rangle$$

Mit der Graßmann-Identität aus (a) folgt:

$$\left\langle \vec{a}\times\vec{b}, \vec{c}\times\vec{d} \right\rangle = \langle \vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{d}),\vec{a}\rangle = \langle \vec{c}\langle\vec{b},\vec{d}\rangle - \vec{d}\langle\vec{b},\vec{c}\rangle,\vec{a}\rangle = \langle\vec{a},\vec{c}\rangle\langle\vec{b},\vec{d}\rangle - \langle\vec{a},\vec{d}\rangle\langle\vec{b},\vec{c}\rangle$$

□

Aufgabe 34:

(a) Wir berechnen das charakteristische Polynom. Für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\begin{aligned}
\chi_A(\lambda) &= \det(A-\lambda I_3) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 3 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ -2 & -3 & 2-\lambda \end{vmatrix} \begin{array}{l} + \\ \\ \\ \end{array} \\
&= \begin{vmatrix} 4-\lambda & 4-\lambda & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ -2 & -3 & 2-\lambda \end{vmatrix} \overset{\text{(D2)}}{=} (4-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ -2 & -3 & 2-\lambda \end{vmatrix} \begin{array}{l} \cdot(-1)\quad \cdot 2 \\ + \\ + \end{array} \\
&= (4-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \underset{\text{1-ter Spalte}}{\overset{\text{Entw. nach}}{=}} (4-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(\lambda^2-2\lambda+1) \\
&= (4-\lambda)(\lambda-1)^2
\end{aligned}$$

Die Nullstellen sind also $\lambda_1 = 1$ mit Vielfachheit 2 und $\lambda_2 = 4$ mit Vielfachheit 1. Nach der Vorlesung sind λ_1 und λ_2 genau die Eigenwerte von A mit den algebraischen Vielfachheiten $m_a(1) = 2$ und $m_a(4) = 1$.

(b) Nach der Vorlesung ist für jeden Eigenwert λ von A der Eigenraum $E_A(\lambda)$ gegeben durch

$$E_A(\lambda) = \mathrm{Kern}(A-\lambda I_3).$$

Wir berechnen diese mit Hilfe des Eliminationsverfahrens nach Gauß und des (-1)-Ergänzungstricks:

- $E_A(1)$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} + \\ \cdot(-2)\quad \cdot 2 \\ + \end{array} \sim \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \mid \cdot \frac{1}{3} \\ \\ + \end{array} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Also ist

$$E_A(1) = \mathrm{lin}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

und $m_g(1) = \dim(E_A(1)) = 1$.

- $E_A(4)$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ -2 & -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} + \\ \cdot 2 \\ + \end{array} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & -9 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \mid \cdot -\frac{1}{9} \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Also ist

$$E_A(4) = \mathrm{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

und $m_g(4) = \dim(E_A(4)) = 1$.

(c) Wegen $m_g(1) = 1 < 2 = m_a(1)$, ist A nach der Vorlesung nicht diagonalisierbar. Aber A hat eine s.g. *Jordan-Normalform*. D.h. es ex. eine reguläre Matrix $S \in \mathbb{C}^3$ mit

$$S^{-1}AS = J = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ,$$

wobei $* \in \{0, 1\}$. Da A und J ähnlich sind und A nicht diagonalisierbar ist, kann J nicht diagonalisierbar sein. Also ist $* = 1$.

Denken wir uns S als Matrix der Spaltenvektoren

$$S = (\vec{s}_1, \vec{s}_2, \vec{s}_3)$$

geschrieben. Es gilt

$$S^{-1}AS = J \Rightarrow AS = SJ \Rightarrow A \underbrace{S\vec{e}_i}_{=\vec{s}_i} = SJ\vec{e}_i \qquad \forall i \in \{1, 2, 3\} ,$$

also $A\vec{s}_1 = 4\vec{s}_1$, $A\vec{s}_2 = \vec{s}_2$ und $A\vec{s}_3 = \vec{s}_2 + \vec{s}_3$. Also ist $\vec{s}_1 \in E_A(4)$, $\vec{s}_2 \in E_A(1)$ und $(A - I_3)\vec{s}_3 = \vec{s}_2$. Wir wählen

$$\vec{s}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} , \quad \vec{s}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und lösen das lineare Gleichungssystem $(A - I_3)\vec{s}_3 = \vec{s}_2$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} + \\ \cdot(-2) \quad \cdot 2 \\ + \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \mid \cdot \frac{1}{3} \\ \\ + \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ablesen liefert, dass

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} : \mu \in \mathbb{C} \right\}$$

die Lösungsmenge des obigen Gleichungssystems ist. Mit $\mu = -1$ lässt sich

$$\vec{s}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

wählen. Es ist dann

$$S = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 35:

Nach der Vorlesung, ändert sich der Wert der Determinante nicht, wenn man zu einer Spalte ein Vielfaches einer anderen Spalte dazuaddiert. Da nach der Vorlesung das Transponieren den Wert der Determinante ebenfalls nicht ändert, gilt die gleiche Regel für Zeilenumformungen.

Es folgt:

$$
\begin{aligned}
\det(A) &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 15 \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 35 \\ 1 & 5 & 15 & 35 & 70 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \cdot(-1)\ \cdot(-1)\ \cdot(-1)\ \cdot(-1) \\ + \\ + \\ + \\ + \end{array} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 9 & 14 \\ 0 & 3 & 9 & 19 & 34 \\ 0 & 4 & 14 & 34 & 69 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \cdot(-2)\ \cdot(-3)\ \cdot(-4) \\ + \\ + \\ + \end{array} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 10 & 22 \\ 0 & 0 & 6 & 22 & 53 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \cdot(-3)\ \cdot(-6) \\ + \\ + \end{array} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 17 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \cdot(-4) \\ + \end{array} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

Nach der Vorlesung ist die Determinante einer oberen rechten Dreiecksmatrix gleich dem Produkt der Diagonalelemente. Also ist $\det(A) = 1$.

Auf 36)

A)

a) $L = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ -D^{-1}C & I_q \end{pmatrix}$

$$ML = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ -D^{-1}C & I_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A-BD^{-1}C & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_p & BD^{-1} \\ 0 & I_q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A-BD^{-1}C & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

$$\det M \det L = \det I_p \det I_q \det(A-BD^{-1}C)\det D$$

$$\det M = \det D \det(A-BD^{-1}C)$$

b) $\det(A-BD^{-1}C) = \det A - \det BD^{-1}C \underset{\uparrow}{=} \det A - \det BCD^{-1} = \det A - \det BC \det D^{-1}$

$DC = CD \Rightarrow D^{-1}C = CD^{-1}$

$$\det D(\det A - \det BC \det D^{-1}) = \det A \det D - \det BC \det D \det D^{-1} = \det(AD-BC)$$

B) $\det\begin{pmatrix} I_m & -A \\ B & I_n \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} -A & I_m \\ I_n & B \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} I_n & B \\ -A & I_m \end{pmatrix}$

$$\det\begin{pmatrix} I_m & -A \\ B & I_n \end{pmatrix} = \det I_n \det(I_m - (-A)I_n^{-1}B) = \det(I_m + AB)$$

$$\det\begin{pmatrix} I_n & B \\ -A & I_m \end{pmatrix} = \det I_m \det(I_n - BI_m^{-1}(-A)) = \det(I_n + BA)$$

Auf 37)

a) Wir benutzen das Resultat von der Aufgabe 36, A, a

$$\left|\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & a & 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & d & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 & d & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}\right| = \det\begin{pmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix} \det\left(\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & b \\ 0 & b & 0 \\ b & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & d^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & d^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & c & 0 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$= d^3\left(a^3 - (-b^3)(d^{-3})(-c^3)\right) = a^3d^3 - b^3c^3$$

b) $$\left|\begin{pmatrix} 0 & x_1 & \cdots & x_n \\ x_1 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ x_n & 0 & & 1 \end{pmatrix}\right| = \det(I_{n-1}) \det\left((0) - (x_1, \dots, x_n)\, I_{n-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) = 1.\left(-\langle x, x\rangle\right) = \langle x, -x\rangle$$