**Institut für Analysis**
Prof. Dr. Dirk Hundertmark
Dr. Michal Jex

SS2017/18
4.6.2018

# Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

## 7. Übungsblatt

**Aufgabe 38:**
Berechnen Sie eine Orthonormalbasis von $U \subseteq \mathbb{R}^5$, die Orthogonalprojektion $Px$ von $x$ auf $U$, sowie den Abstand $d(x, U) = \min_{y \in U} \|x - y\|$ für

(a) $U = \mathrm{lin}(v_1, v_2, v_3)$ und

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \text{bzw.}$$

(b) $U = \mathrm{lin}(v_1, v_2, v_3, v_4)$ und

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ -3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 39:**
Es sei $V = P[-1, 1]$ der Vektorraum der reellen Polynomfunktionen auf $[a, b]$ und $p_k \in V$ definiert durch

$$p_m(x) = x^m$$

für alle $m \in \mathbb{N}_0$ und $x \in [-1, 1]$ (*Monome*). Ferner seien die Skalarprodukte $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ bzw. $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ durch

$$\text{(a)} \quad \langle p, q \rangle_1 = \int_{-1}^{1} \frac{p(y)q(y)}{\sqrt{1 - y^2}} \mathrm{dy} \qquad \text{bzw.} \qquad \text{(b)} \quad \langle p, q \rangle_2 = \int_{-1}^{1} p(y)q(y) \mathrm{dy}$$

für alle $p, q \in V$ erklärt. Wenden Sie das Gram-Schmidt-Verfahren bezüglich des Skalarproduktes $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ bzw $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ auf $p_0, p_1, p_2, p_3$ an.
*Bemerkung:* Sie erhalten die s.g. *Tschebyschow-Polynome* bei (a) und (bis auf Normierung) die s.g. *Legendre-Polynome* bei (b).

**Aufgabe 40:**
Betrachten Sie die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 4 & -7 & -2 & 2 \\ -4 & 10 & 5 & -2 \\ 6 & -12 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte $\lambda$ von $B$ und ihre algebraischen Vielfachheiten $m_a(\lambda)$. (Die *algebraische* Vielfachheit ist die größte Potenz $k$ mit der der Eigenwert $\lambda_0$ als Factor $(\lambda - \lambda_0)^k$ im charakteristischen Polynom vorkommt.)

**— Bitte wenden! —**

(b) Bestimmen Sie für alle Eigenwerte $\lambda$ ihre geometrische Vielfachheit $m_g(\lambda)$, sowie den zugehörigen Eigenraum $E_B(\lambda)$. (Die *geometrische* Vielfachheit ist die Dimension des zum Eigenwert gehörenden Eigenraumes $\mathrm{Kern}(B - \lambda I)$.)

(c) Ist $B$ diagonalisierbar? Geben Sie ggf. eine invertierbare Matrix $S$ an, mit der $S^{-1}BS$ Diagonalgestalt hat.

## Aufgabe 41:

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mit

$$\langle x, Ax\rangle = 0$$

für alle $x \in \mathbb{K}^n$. Hier ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{K}^n$.

(a) Zeigen Sie, dass falls $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ist, bereits $A = 0$ sein muss.

(b) Ist die Aussage auch für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ richtig?

## Aufgabe 42:

Betrachten Sie

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 2 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 2 \end{pmatrix} .$$

(a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von $A$ und geben Sie eine orthogonale Matrix $S$ an, so dass $S^{-1}AS$ Diagonalgestalt hat.

(b) Bestimmen Sie eine Matrix $W \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ derart, dass $W^2 = A$ gilt.

## Aufgabe 43:

Betrachten Sie

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} .$$

(a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von $B$ und geben Sie eine orthogonale Matrix $T$ an, so dass $T^{-1}BT$ Diagonalgestalt hat.

(b) Berechnen Sie $B^k$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

## Aufgabe 44:

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Untersuchen Sie die Matrix

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 8 & \alpha \\ 0 & \alpha & 1 \end{pmatrix}$$

auf Definitheit. Hierbei heißt eine Matrix (oder lineare Abbildung) $A$ positiv semi–definit falls $\langle x, Ax\rangle \geq 0$ is für alle $x \in V$ und positiv definit, falls $\langle x, Ax\rangle > 0$ is für alle $x \in V \setminus 0$. Analog für negativ definit.

**Hinweis:** In der großen Saalübung werden voraussichtlich die Aufgaben 41, 42, 43 und 44 besprochen. Die restlichen Aufgaben werden in den Tutorien behandelt.