Institut für Analysis
Prof. Dr. Dirk Hundertmark
Dr. Michal Jex

SS2017/18
8.6.2018

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 07. Übungsblatt

Aufgabe 38:

(a) Wir berechnen mit Hilfe des Gram-Schmidt-Verfahrens ein Orthonormalsystem $B = \left\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\right\}$, welches U erzeugt, wie folgt:

$$\begin{aligned} & & \vec{b}_1 &= \frac{\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|} \\ \vec{c}_2 &= \vec{v}_2 - (\vec{v}_2|\vec{b}_1)\vec{b}_1 & \vec{b}_2 &= \frac{\vec{c}_2}{\|\vec{c}_2\|} \\ \vec{c}_3 &= \vec{v}_3 - (\vec{v}_3|\vec{b}_1)\vec{b}_1 - (\vec{v}_3|\vec{b}_2)\vec{b}_2 & \vec{b}_3 &= \frac{\vec{c}_3}{\|\vec{c}_3\|} \end{aligned}$$

Es gilt:

$$\|\vec{v}_1\| = \sqrt{1^2+1^2+1^2} = \sqrt{3} \qquad \Rightarrow \vec{b}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix},$$

$$(\vec{v}_2|\vec{b}_1) = \frac{1}{\sqrt{3}}(1\cdot 2 + 1\cdot 0 + 0\cdot 1 + 1\cdot 1 + 0\cdot 0) = \frac{3}{\sqrt{3}} \qquad \Rightarrow \vec{c}_2 = \begin{pmatrix}2\\0\\1\\1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\\0\end{pmatrix},$$

$$\|\vec{c}_2\| = \sqrt{3} \qquad \Rightarrow \vec{b}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\\0\end{pmatrix},$$

$$(\vec{v}_3|\vec{b}_1) = \frac{1}{\sqrt{3}},\ (\vec{v}_3|\vec{b}_2) = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \Rightarrow \vec{c}_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2\\0\\2\\2\\0\end{pmatrix},$$

$$\|\vec{c}_3\| = \sqrt{\frac{12}{9}} = \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \qquad \Rightarrow \vec{b}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\1\\0\end{pmatrix}$$

Nach der Vorlesung ist die Orthogonalprojektion $P\vec{x}$ gegeben durch:

$$P\vec{x} = (\vec{x}|\vec{b}_1)\vec{b}_1 + (\vec{x}|\vec{b}_2)\vec{b}_2 + (\vec{x}|\vec{b}_3)\vec{b}_3$$

Wir berechnen:

$$(\vec{x}|\vec{b}_1) = \frac{7}{\sqrt{3}}, \qquad (\vec{x}|\vec{b}_2) = \frac{2}{\sqrt{3}}, \qquad (\vec{x}|\vec{b}_3) = \frac{6}{\sqrt{3}}$$

Es folgt:

$$P\vec{x} = \frac{7}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix} + \frac{2}{3}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\\0\end{pmatrix} + \frac{6}{3}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}3\\5\\8\\13\\0\end{pmatrix}$$

Schließlich ist nach der Vorlesung:

$$d(\vec{x}, U) = \min_{\vec{y}\in U} = \|\vec{x} - \vec{y}\| = \|\vec{x} - P\vec{x}\|$$

Wir berechnen:

$$\vec{x} - P\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\\5\end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix}3\\5\\8\\13\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}0\\1\\1\\-1\\15\end{pmatrix}, \qquad \|\vec{x} - P\vec{x}\| = \frac{\sqrt{228}}{3} \approx 5,03$$

(b) Wie in der ersten Teilaufgabe berechnen wir:

$$\|\vec{v}_1\| = 3 \qquad \Rightarrow \vec{b}_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\0\\-1\\2\\0\end{pmatrix},$$

$$(\vec{v}_2|\vec{b}_1) = 3 \qquad \Rightarrow \vec{c}_2 = \begin{pmatrix}2\\1\\-3\\1\\-1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\0\\-1\\2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\-2\\-1\\-1\end{pmatrix},$$

$$\|\vec{c}_2\| = \sqrt{7} \qquad \Rightarrow \vec{b}_2 = \frac{1}{\sqrt{7}}\begin{pmatrix}0\\1\\-2\\-1\\-1\end{pmatrix},$$

$$(\vec{v}_3|\vec{b}_1) = 0,\ (\vec{v}_3|\vec{b}_2) = -\frac{14}{\sqrt{7}} \qquad \Rightarrow \vec{c}_3 = \begin{pmatrix}1\\-3\\4\\1\\2\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}0\\1\\-2\\-1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\\-1\\0\end{pmatrix},$$

$$\|\vec{c}_3\| = \sqrt{3} \qquad \Rightarrow \vec{b}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}$$

$$(\vec{v}_4|\vec{b}_1) = \frac{27}{3} = 9,\ (\vec{v}_4|\vec{b}_2) = 0,\ (\vec{v}_4|\vec{b}_3) = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \qquad \Rightarrow \vec{c}_4 = \begin{pmatrix}7\\-1\\-3\\5\\0\end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix}2\\0\\-1\\2\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\-1\\0\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\|\vec{c}_4\| = 0 \qquad \Rightarrow \operatorname{lin}\left\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\right\} = \operatorname{lin}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$$

Für die Orthogonalprojektion $P\vec{x}$ berechnen wir

$$(\vec{x}|\vec{b}_1) = 2,\ (\vec{x}|\vec{b}_2) = -\frac{8}{\sqrt{7}},\ (\vec{x}|\vec{b}_3) = -\sqrt{3}$$

und erhalten

$$P\vec{x} = \frac{2}{3}\begin{pmatrix}2\\0\\-1\\2\\0\end{pmatrix} - \frac{8}{7}\begin{pmatrix}0\\1\\-2\\-1\\-1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\-1\\0\\-1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{21}\begin{pmatrix}7\\-3\\34\\73\\24\end{pmatrix}.$$

Schließlich ist:

$$\begin{aligned}
\vec{x} - P\vec{x} &= \begin{pmatrix}1\\1\\2\\3\\2\end{pmatrix} - \frac{1}{21}\begin{pmatrix}7\\-3\\34\\73\\24\end{pmatrix} = \frac{1}{21}\begin{pmatrix}14\\24\\8\\-10\\18\end{pmatrix}\\
d(\vec{x}, U) &= \min_{\vec{y}\in U}\|\vec{x}-\vec{y}\| = \|\vec{x} - P\vec{x}\| = \frac{\sqrt{14^2+24^2+8^2+10^2+18^2}}{21} = \frac{\sqrt{1260}}{21} = \frac{\sqrt{4\cdot 3\cdot 5\cdot 21}}{21} = 2\sqrt{\frac{5}{7}}
\end{aligned}$$

Aufgabe 39:

(a) Es ist:

$$\begin{aligned}
\langle p_0|p_0\rangle_1 &= \int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y = \lim_{b\to -1+}\int_b^0 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x + \lim_{a\to 1-}\int_0^a \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y\\
&\overset{x=-t}{=} \lim_{b\to 1-}\int_0^b \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t + \lim_{a\to 1-}\int_0^a \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y = 2\lim_{a\to 1-}\int_0^a\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y\\
&\underset{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\cos(t)}{\overset{y=\sin(t)}{=}} 2\lim_{a\to 1-}\int_0^{\arcsin(a)}\frac{\cos(t)}{\sqrt{1-\sin^2(t)}}\mathrm{d}t = 2\lim_{a\to 1-}\int_0^{\arcsin(a)}\frac{\overbrace{\cos(t)}^{>0}}{|\cos(t)|}\mathrm{d}t\\
&= 2\lim_{a\to 1-}\int_0^{\arcsin(a)} 1\mathrm{d}t = 2\lim_{a\to 1-}\arcsin(a) = 2\frac{\pi}{2} = \pi
\end{aligned}$$

Also ist $b_0(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$ für alle $t \in [-1,1]$.

Ferner ist

$$\langle p_1|b_0\rangle_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-1}^{1}\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y.$$

Wegen $\left|\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\right| \le \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$ für alle $y \in (-1,1)$ und da das uneigentliche Integral $\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y$ nach obiger Rechnung konvergiert, konvergiert auch das uneigentliche Integral in $\langle p_1|b_0\rangle_1$ nach dem Majorantenkriterium. Da der Integrand punktsymmetrisch ist, gilt $\langle p_1|b_0\rangle_1 = 0$. Des Weiteren ist

$$\begin{aligned}
\langle p_1|p_1\rangle_1 &= \int_{-1}^{1}\frac{y^2}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y = \lim_{b\to -1+}\int_b^0\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x + \lim_{a\to 1-}\int_0^a\frac{y^2}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y\\
&\overset{x=-t}{=} 2\lim_{a\to 1-}\int_0^a\frac{y^2}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y \underset{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\cos(t)}{\overset{y=\sin(t)}{=}} 2\lim_{a\to 1-}\int_0^{\arcsin(a)}\frac{\sin^2(t)\overbrace{\cos(t)}^{>0}}{\sqrt{\cos^2(t)}}\mathrm{d}t\\
&= 2\lim_{a\to 1-}\int_0^{\arcsin(a)}\sin^2(t)\mathrm{d}t \overset{\text{Hauptsatz}}{=} 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2(t)\mathrm{d}t\\
&= [t - \sin(t)\cos(t)]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Also ist $b_1(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}t$ für alle $t \in [-1,1]$.
Ferner ist
$$\langle p_2|b_0\rangle_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-1}^{1} \frac{y^2}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \langle p_1|p_1\rangle_1 = \sqrt{\frac{\pi}{4}}$$
und
$$\langle p_2|b_1\rangle_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-1}^{1} \frac{y^3}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y.$$
Wie bei $\langle p_1|b_0\rangle_1$ sieht man, dass $\langle p_2|b_1\rangle = 0$ gilt. Für alle $t \in [-1,1]$ gilt also
$$c_2(t) = p_2(t) - \langle p_2|b_0\rangle_1 b_0(t) - \langle p_2|b_1\rangle_1 b_1(t) = t^2 - \frac{1}{2}.$$
Des Weiteren ist
$$\begin{aligned}\langle c_2|c_2\rangle_1 &= \int_{-1}^{1} \frac{\left(y^2-\frac{1}{2}\right)^2}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y = \int_{-1}^{1} \frac{y^4}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y - \int_{-1}^{1} \frac{y^2}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y + \int_{-1}^{1} \frac{\frac{1}{4}}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y \\ &= \int_{-1}^{1} \frac{y^4}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y - \langle p_1|p_1\rangle_1 + \frac{1}{4}\langle p_0|p_0\rangle_1 = \int_{-1}^{1} \frac{y^4}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y - \frac{\pi}{4},\end{aligned}$$
sowie
$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} \frac{y^4}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y &= \lim_{b\to -1+} \int_{b}^{0} \frac{x^4}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}y + \lim_{a\to 1-} \int_{0}^{a} \frac{y^4}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y \\ &\overset{x=-t}{=} 2\lim_{a\to 1-} \int_{0}^{a} \frac{y^4}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y \underset{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\cos(t)}{\overset{y=\sin(t)}{=}} 2\lim_{a\to 1-} \int_{0}^{\arcsin(a)} \frac{\sin^4(t)\overbrace{\cos(t)}^{>0}}{\sqrt{\cos^2(t)}}\mathrm{d}t \\ &= 2\lim_{a\to 1-} \int_{0}^{\arcsin(a)} \sin^4(t)\mathrm{d}t \overset{\text{Hauptsatz}}{=} 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^4(t)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$
Eine Stammfunktion zu $\sin^4$ lässt sich mit dem *Phönix-aus-der-Asche-Trick* berechnen:
$$\begin{aligned}\int \sin^4(t)\mathrm{d}t &= \int \underbrace{\sin(t)}_{u'(t)}\underbrace{\sin^3(t)}_{v(t)}\mathrm{d}t \overset{\text{Part. Int.}}{=} -\left[\cos(t)\sin^3(t)\right] + 3\int \cos^2(t)\sin^2(t)\mathrm{d}t \\ &= -\left[\cos(t)\sin^3(t)\right] + 3\int (1-\sin^2(t))\sin^2(t)\mathrm{d}t \\ &= -\left[\cos(t)\sin^3(t)\right] + 3\int \sin^2(t))\mathrm{d}t - 3\int \sin^4(t)\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{3}{2}(t-\sin(t)\cos(t)) - \cos(t)\sin^3(t)\right] - 3\int \sin^4(t)\mathrm{d}t \\ \Rightarrow \int \sin^4(t)\mathrm{d}t &= \left[\frac{3}{8}t - \cos(t)\left(\frac{\sin^3(t)}{4} + \frac{3\sin(t)}{8}\right)\right]\end{aligned}$$
Damit folgt
$$2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^4(t)\mathrm{d}t = \frac{3\pi}{8} \text{ und } \langle c_2|c_2\rangle_1 = \frac{\pi}{8}.$$
Also ist $b_2(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}(2t^2-1)$ für alle $t \in [-1,1]$.
Schließlich ist
$$\begin{aligned}\langle p_3|b_0\rangle_1 &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-1}^{1} \frac{y^3}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y = \frac{1}{\sqrt{2}} \langle p_2|b_1\rangle_1 = 0, \\ \langle p_3|b_1\rangle_1 &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-1}^{1} \frac{y^4}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y \overset{\text{s.o.}}{=} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{3\pi}{8} = \sqrt{2\pi}\frac{3}{8}, \\ \langle p_3|b_2\rangle_1 &= \sqrt{\frac{8}{\pi}} \int_{-1}^{1} \frac{y^3(y^2-\frac{1}{2})}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y = \sqrt{\frac{8}{\pi}}\left(\int_{-1}^{1} \frac{y^5}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{y^3}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y\right) = 0,\end{aligned}$$

da $\int_{-1}^1 \frac{y^5}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y = 0$ wie bei $\langle p_1|b_0\rangle_1$ und $\int_{-1}^1 \frac{y^3}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\langle p_2|b_1\rangle_1 = 0$. Damit ist für alle $t \in [-1,1]$

$$c_3(t) = p_3(t) - \langle p_3|b_0\rangle_1\, b_0(t) - \langle p_3|b_1\rangle_1\, b_1(t) - \langle p_3|b_2\rangle_1\, b_2(t) = t^3 - \frac{3}{4}t.$$

Es bleibt noch

$$\begin{aligned}\langle c_3|c_3\rangle_1 &= \int_{-1}^1 \frac{\left(y^3 - \frac{3}{4}y\right)^2}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y = \int_{-1}^1 \frac{y^6}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y - \frac{3}{2}\int_{-1}^1 \frac{y^4}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y + \frac{9}{16}\int_{-1}^1 \frac{y^2}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y \\ &= \int_{-1}^1 \frac{y^6}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y - \frac{3}{2}\cdot\frac{3}{8}\pi + \frac{9}{16}\cdot\frac{\pi}{2} = \int_{-1}^1 \frac{y^6}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y - \frac{9}{32}\pi\end{aligned}$$

zu berechnen. Wie bei $\langle c_2|c_2\rangle_1$ sieht man, dass

$$\int_{-1}^1 \frac{y^6}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6(t)\mathrm{d}t.$$

Wieder liefert der *Phönix-aus-der-Asche-Trick*:

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6(t)\mathrm{d}t &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\sin(t)}_{u'(t)}\underbrace{\sin^4(t)}_{v(t)}\,\mathrm{d}t \overset{\text{Part. Int.}}{=} -\left[\cos(t)\sin^4(t)\right]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} + 5\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\sin^4(t)\mathrm{d}t \\ &= 5\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2(t))\sin^4(t)\mathrm{d}t \\ &\overset{\text{s. o.}}{=} 5\left[\frac{3}{8}t - \cos(t)\left(\frac{\sin^3(t)}{4} + \frac{3\sin(t)}{8}\right)\right]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} - 5\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6(t)\mathrm{d}t \\ &= \frac{15}{16}\pi - 5\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6(t)\mathrm{d}t \\ \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6(t)\mathrm{d}t &= \frac{5}{32}\pi\end{aligned}$$

Also ist $\langle c_3|c_3\rangle_1 = \frac{\pi}{32}$ und für alle $t \in [-1,1]$ ist

$$b_3(t) = \sqrt{\frac{32}{\pi}}\left(t^3 - \frac{3}{4}t\right).$$

(b) Es gilt:

$$\langle p_0|p_0\rangle_2 = \int_{-1}^1 1\,\mathrm{d}y = 2.$$

Also ist $b_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ für alle $t \in [-1,1]$.

Ferner ist

$$\langle p_1|b_0\rangle_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-1}^1 y\,\mathrm{d}y = 0.$$

Des Weiteren ist

$$\langle p_1|p_1\rangle_2 = \int_{-1}^1 y^2\,\mathrm{d}y = \left[\frac{y^3}{3}\right]_{t=-1}^{t=1} = \frac{2}{3}.$$

Also ist $b_1(t) = \sqrt{\frac{3}{2}}t$ für alle $t \in [-1,1]$.

Ferner ist

$$\langle p_2|b_0\rangle_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-1}^1 y^2\,\mathrm{d}y = \frac{\sqrt{2}}{3} \qquad \text{und} \qquad \langle p_2|b_1\rangle_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}\int_{-1}^1 y^3\,\mathrm{d}y = 0.$$

Also ist

$$c_2(t) = p_2(t) - \langle p_2|b_0\rangle_2\, b_0(t) - \langle p_2|b_1\rangle_2\, b_1(t) = t^2 - \frac{1}{3}$$

für alle $t \in [-1,1]$ und wegen

$$\langle c_2|c_2\rangle_2 = \int_{-1}^{1} \left(y^2 - \frac{1}{3}\right)^2 \mathrm{d}y = \int_{-1}^{1} y^4 - \frac{2}{3}y^2 + \frac{1}{9}\mathrm{d}y = \frac{2}{5} - \frac{4}{9} + \frac{2}{9} = \frac{8}{45}$$

ist $b_2(t) = \sqrt{\frac{45}{8}}\left(t^2 - \frac{1}{3}\right)$ für alle $t \in [-1,1]$.

Schließlich ist

$$\begin{aligned}
\langle p_3|b_0\rangle_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^{1} y^3 \mathrm{d}y = 0, \\
\langle p_3|b_1\rangle_2 &= \sqrt{\frac{3}{2}} \int_{-1}^{1} y^4 \mathrm{d}y = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{2}{5}, \\
\langle p_3|b_2\rangle_2 &= \sqrt{\frac{45}{8}} \int_{-1}^{1} y^3 \left(y^2 - \frac{1}{3}\right) \mathrm{d}y = \sqrt{\frac{45}{8}} \int_{-1}^{1} y^5 - \frac{1}{3}y^3 \mathrm{d}y = 0
\end{aligned}$$

und damit

$$c_3(t) = p_3(t) - \langle p_3|b_2\rangle_2\, b_2(t) - \langle p_3|b_1\rangle_2\, b_1(t) - \langle p_3|b_0\rangle_2\, b_0(t) = t^3 - \frac{3}{5}t$$

für alle $t \in [-1,1]$. Es bleibt noch

$$\langle c_3|c_3\rangle_2 = \int_{-1}^{1} \left(t^3 - \frac{3}{5}t\right)^2 \mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} t^6 - \frac{6}{5}t^4 + \frac{9}{25}t^2 \mathrm{d}t = \frac{2}{7} - \frac{12}{25} + \frac{6}{25} = \frac{8}{175}$$

zu berechnen. Also ist $b_3(t) = \sqrt{\frac{175}{8}}\left(t^3 - \frac{3}{5}t\right)$ für alle $t \in [-1,1]$.

Aufgabe 40:

(a) Wir berechnen das charakteristische Polynom. Für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt:

$$
\begin{aligned}
\chi_B(\lambda) &= \det(B - \lambda I_4) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & -1 & -2 \\ 4 & -7-\lambda & -2 & 2 \\ -4 & 10 & 5-\lambda & -2 \\ 6 & -12 & 0 & 9-\lambda \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3-\lambda & 3-\lambda & 0 \\ -4 & 10 & 5-\lambda & -2 \\ 6 & -12 & 0 & 9-\lambda \end{vmatrix} \overset{\text{(D2)}}{=} (3-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -4 & 10 & 5-\lambda & -2 \\ 6 & -12 & 0 & 9-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (3-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 10 & -5-\lambda & -2 \\ 6 & -12 & 12 & 9-\lambda \end{vmatrix} \underset{\text{2-ter Zeile}}{\overset{\text{Entw. nach}}{=}} (3-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & -2 \\ -4 & -5-\lambda & -2 \\ 6 & 12 & 9-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (3-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 0 \\ -4 & -5-\lambda & 3+\lambda \\ 6 & 12 & -3-\lambda \end{vmatrix} \overset{\text{(D2)}}{=} (3-\lambda)(3+\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 0 \\ -4 & -5-\lambda & 1 \\ 6 & 12 & -1 \end{vmatrix} \\
&= (3-\lambda)(3+\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 0 \\ 2 & 7-\lambda & 0 \\ 6 & 12 & -1 \end{vmatrix} \underset{\text{3-ter Spalte}}{\overset{\text{Entw. nach}}{=}} (3-\lambda)(-3-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 \\ 2 & 7-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (3-\lambda)(-3-\lambda)((2-\lambda)(7-\lambda)+4) = (3-\lambda)(-3-\lambda)(\underbrace{\lambda^2 - 9\lambda + 18}_{=(\lambda-3)(\lambda-6)}) \\
&= (3-\lambda)^2(-3-\lambda)(6-\lambda)
\end{aligned}
$$

Die Nullstellen sind also $\lambda_1 = -3$ mit Vielfachheit 1, $\lambda_2 = 3$ mit Vielfachheit 2 und $\lambda_3 = 6$ mit Vielfachheit 1. Nach der Vorlesung sind λ_1, λ_2 und λ_3 genau die Eigenwerte von B mit den algebraischen Vielfachheiten $m_a(-3) = 1$, $m_a(3) = 2$ und $m_a(6) = 1$.

(b) Nach Abschnitt 18.2 der Vorlesung ist für jeden Eigenwert λ von B der Eigenraum $E_B(\lambda)$ gegeben durch

$$E_B(\lambda) = \mathrm{Kern}(B - \lambda I_4).$$

Wir berechnen diese mit Hilfe des Eliminationsverfahrens nach Gauß und des (-1)-Ergänzungstricks:

- $E_B(-3)$:

$$
\begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 & -2 \\ 4 & -4 & -2 & 2 \\ -4 & 10 & 8 & -2 \\ 6 & -12 & 0 & 12 \end{pmatrix}
\begin{array}{l} \\ \quad | \cdot \frac{1}{2} \\ + \\ | \cdot \frac{1}{6} \end{array}
\sim
\begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 6 & 6 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}
\begin{array}{l} + \\ + \\ | \cdot \frac{1}{6} \\ \cdot(-2) \quad \cdot(-5) \end{array}
$$

$$
\sim
\begin{pmatrix} 0 & 11 & -1 & -12 \\ 0 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}
\begin{array}{l} + \\ + \\ \cdot(-2) \quad \cdot(-11) \quad \cdot 2 \\ + \end{array}
$$

$$
\sim
\begin{pmatrix} 0 & 0 & -12 & -12 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}
\begin{array}{l} + \\ | \cdot -\frac{1}{3} \quad \cdot 12 \quad \cdot(-1) \quad \cdot(-2) \\ + \\ + \end{array}
$$

$$
\sim
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

Also ist

$$E_B(-3) = \operatorname{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

und $m_g(-3) = \dim E_B(-3) = 1$.

- $E_B(3)$:

$$
\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & -2 \\ 4 & -10 & -2 & 2 \\ -4 & 10 & 2 & -2 \\ 6 & -12 & 0 & 6 \end{pmatrix}
\begin{array}{l} \cdot 4 \quad \cdot 6 \\ + \\ + \\ + \end{array}
\sim
\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -6 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -6 & -6 \end{pmatrix}
\begin{array}{l} | \cdot (-1) \quad + \\ \cdot(-1) \quad | \cdot -\frac{1}{6} \\ \\ + \end{array}
$$

$$
\sim
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

Also ist

$$E_B(3) = \operatorname{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

und $m_g(3) = \dim E_B(3) = 2$.

- $E_B(6)$:

$$\begin{pmatrix} -4 & 1 & -1 & -2 \\ 4 & -13 & -2 & 2 \\ -4 & 10 & -1 & -2 \\ 6 & -12 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -12 & -3 & 0 \\ 4 & -13 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 2 & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Also ist

$$E_B(6) = \operatorname{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

und $m_g(6) = \dim E_B(6) = 1$.

(c) Wegen $m_g(-3) + m_g(3) + m_g(6) = 1 + 2 + 1 = 4 = \dim(\mathbb{C}^4)$, ist B nach der Vorlesung diagonalisierbar. Nach ebendiesem Abschnitt erhält man ein mögliches S indem man die bereits berechneten Eigenvektoren in eine Matrix schreibt:

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 41:

(a) Sei $B_K = \left\{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_m\right\}$ eine ONB des Kern(A) (eine solche existiert nach der Vorlesung). Ist $m = n$, so ist Kern$(A) = \mathbb{K}^n$, also $A = 0$. Sei also im Folgenden $0 \leq m < n$. Wir wenden das Gram-Schmidt-Verfahren auf die Menge $\left\{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_m, \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\right\}$ an und erhalten eine ONB

$$B = \left\{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_m, \vec{b}_{m+1}, \ldots, \vec{b}_n\right\}$$

des $\mathbb{K}^n$. Sei $S = (\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n)$ die Matrix, deren Spalten gerade die Vektoren $\vec{b}_i$ $(i \in \{1, \ldots, n\})$ sind. Es ist $S^{-1} = S^*$. Definiere $B = S^{-1}AS$. Dann ist $A = SBS^{-1}$. Die Matrizen A und B sind ähnlich.

Bemerkung: B ist die Darstellungsmatrix der linearen Abbildung $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$ bezüglich der Basis B.

Welche Gestalt hat B? Es gilt für jede Matrix $C \in \mathbb{K}^{n \times n}$

$$C_{ij} = (\vec{e}_i | C\vec{e}_j)$$

für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Für die Matrix B gilt also

$$B_{ij} = (\vec{e}_i|B\vec{e}_j) = (\vec{e}_i|S^{-1}AS\vec{e}_j) = (\vec{e}_i|S^*AS\vec{e}_j) = (\underbrace{S\vec{e}_i}_{=\vec{b}_i}|A\underbrace{S\vec{e}_j}_{=\vec{b}_j}) = (\vec{b}_i|A\vec{b}_j)$$

für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Da $\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_m \in \text{Kern}(A)$, ist $B_{ij} = 0$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ und alle $j \in \{1, \ldots, m\}$. Es gilt $\text{Kern}(A) \perp \text{Bild}(A)$, wenn $(Ax, x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{K}^n$. Also ist $B_{ij} = 0$ für alle $i \in \{1, \ldots, m\}$ und alle $j \in \{1, \ldots, n\}$. Damit hat B die folgende Blockgestalt

$$B = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & B' \end{array}\right)$$

mit einer Matrix $B' \in \mathbb{K}^{(n-m)\times(n-m)}$. Das charakteristische Polynom von B' ist ein komplexes Polynom vom Grad $n - m > 0$. Als solches hat es nach dem Fundamentalsatz der Algebra mindestens eine (komplexe) Nullstelle λ. Dieses λ ist ein Eigenwert von B'. Nach der Vorlesung, existiert also ein Eigenvektor $\vec{y}' \in \mathbb{K}^{n-m} \setminus \left\{\vec{0}\right\}$ mit $B'\vec{y}' = \lambda\vec{y}'$. Dann ist (wegen der Blockgestalt)

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vec{y}' \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$$

ein Eigenvektor von B zum Eigenwert λ. Betrachte nun

$$\vec{x} = S\vec{y} = \sum_{j=1}^{n-m} y_j \vec{b}_{j+m} \in \text{lin}\left\{\vec{b}_{m+1}, \ldots, \vec{b}_n\right\}.$$

Es gilt

$$A\vec{x} = SBS^{-1}\vec{x} = SBS^{-1}S\vec{y} = SB\vec{y} = \lambda S\vec{y} = \lambda\vec{x},$$

also ist $\vec{x} \neq \vec{0}$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ. Wegen

$$0 = (A\vec{x}|\vec{x}) = (\lambda\vec{x}|\vec{x}) = \lambda\underbrace{(\vec{x}|\vec{x})}_{>0}$$

ist $\lambda = 0$ und damit $\vec{x} \in \text{Kern}(A) = \text{lin}\left(\left\{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_m\right\}\right)$. Dies ist ein Widerspruch zu B Basis von $\mathbb{K}^n$. Also muss die Annahme $m < n$ verworfen werden und damit ist $A = 0$.

□

(b) Im Beweis in (a) wird $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ nur benutzt, um die Existenz des Eigenwerts λ bzw. des Eigenvektors $\vec{y}'$ sicherzustellen. Für ein Gegenbeispiel bräuchten wir also eine Matrix A, mit nicht-reellen Eigenwerten, die die Bedingung

$$(A\vec{x}|\vec{x}) \qquad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$$

erfüllt. Für $n = 2$ liefert die *Drehmatix*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

das Gewünschte, denn für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ ist

$$\det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = (\lambda - \mathrm{i})(\lambda + \mathrm{i}),$$

womit die Eigenwerte von A genau i und $-$i sind, sowie

$$\left(A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\middle|\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \left(\begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}\middle|\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = -x_2x_1 + x_1x_2 = 0$$

für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Für $n > 2$ betrachte man die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Aufgabe 42:

(a) Wir berechnen das charakteristische Polynom. Für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\begin{aligned}
\chi_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 2-\lambda & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 2-\lambda \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 2-\lambda \end{vmatrix} \overset{\text{(D2)}}{=} (2-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 2-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (2-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\sqrt{2} & 2-\lambda \end{vmatrix} \underset{\text{1-ter Zeile}}{\overset{\text{Entw. nach}}{=}} (2-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\sqrt{2} & 2-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (2-\lambda)((2-\lambda)^2 - 1) = (2-\lambda)(2-\lambda-1)(2-\lambda+1) = (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda)
\end{aligned}$$

Nach der Vorlesung ist das Spektrum von A gerade die Nullstellenmenge von χ_A, also

$$\operatorname{spec}(A) = \{1, 2, 3\}.$$

Nach der Vorlesung ist für jeden Eigenwert λ von A der Eigenraum $E_A(\lambda)$ gegeben durch

$$E_A(\lambda) = \operatorname{Kern}(A - \lambda I_3).$$

Wir berechnen diese mit Hilfe des Eliminationsverfahrens nach Gauß und des (-1)-Ergänzungstricks:

- $E_A(1)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \end{pmatrix} \cdot\left(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot\tfrac{1}{\sqrt{2}} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  Also ist $E_A(1) = \operatorname{lin}\{\vec{p}_1\}$ mit

$$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 \end{pmatrix} \text{ bzw. } \vec{v}_1 = \frac{\vec{p}_1}{\|\vec{p}_1\|} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

- $E_A(2)$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} | \cdot \sqrt{2} \\ \\ | \cdot \sqrt{2} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Also ist $E_A(2) = \operatorname{lin}\{\vec{p}_2\}$ mit

$$\vec{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ bzw. } \vec{b}_2 = \frac{\vec{p}_2}{\|\vec{p}_2\|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- $E_A(3)$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \mid \cdot(-1) \\ \mid \cdot(-1) \\ + \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ + \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Also ist $E_A(2) = \operatorname{lin}\{\vec{p}_3\}$ mit

$$\vec{p}_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 \end{pmatrix} \text{ bzw. } \vec{v}_3 = \frac{\vec{p}_3}{\|\vec{p}_3\|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Nach der Vorlesung sind Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten von symmetrischen Matrizen immer orthogonal zueinander. Die normierten Vektoren $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ bilden deshalb die orthogonale Matrix

$$S = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$A = SDS^T \text{ mit } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(b) Definiere

$$D' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

sowie $W = SD'S^T$. Dann ist in der Tat

$$W^2 = (SD'S^T)^2 = SD' \underbrace{S^T S}_{=I_3} D'S^T = SD'D'S^T = S(D')^2 S^T = SDS^T = A.$$

Ausrechnen liefert:

$$W = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 + 2\sqrt{2} + \sqrt{3} & -1 + 2\sqrt{2} - \sqrt{3} & \sqrt{6} - \sqrt{2} \\ -1 + 2\sqrt{2} - \sqrt{3} & 1 + 2\sqrt{2} + \sqrt{3} & \sqrt{2} - \sqrt{6} \\ \sqrt{6} - \sqrt{2} & \sqrt{2} - \sqrt{6} & 2 + 2\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 43:

(a) Wir berechnen das charakteristische Polynom. Für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\chi_B(\lambda) = \det(B - \lambda I_4) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 4-\lambda & 4-\lambda & 0 \\ 0 & \lambda-4 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} \overset{\text{(D2)}}{=} (4-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (4-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \underset{\text{4-ten Zeile}}{\overset{\text{Entw. nach}}{=}} (4-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (4-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 3-\lambda & 3 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \underset{\text{3-ten Zeile}}{\overset{\text{Entw. nach}}{=}} (4-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 3-\lambda & 3 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (4-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 3-\lambda & 3 \\ 4-\lambda & 4-\lambda \end{vmatrix} \overset{\text{(D2)}}{=} (4-\lambda)^3 \begin{vmatrix} 3-\lambda & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (4-\lambda)^3(3-\lambda-3) = -\lambda(4-\lambda)^3$$

Nach der Vorlesung ist das Spektrum von B gerade die Nullstellenmenge von χ_B, also

$$\operatorname{spec}(B) = \{0, 4\}.$$

Nach Abschnitt 18.2 der Vorlesung ist für jeden Eigenwert λ von B der Eigenraum $E_B(\lambda)$ gegeben durch

$$E_B(\lambda) = \operatorname{Kern}(B - \lambda I_4).$$

Wir berechnen diese mit Hilfe des Eliminationsverfahrens nach Gauß und des (-1)-Ergänzungstricks:

- $E_B(0)$:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -8 & -4 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \mid \cdot \frac{1}{4} \\ \mid \cdot \frac{1}{4} \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Also ist $E_B(0) = \operatorname{lin}\{\vec{p}_1\}$ mit

$$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{bzw. } \vec{b}_1 = \frac{\vec{p}_1}{\|\vec{p}_1\|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

- $E_B(4)$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \cdot(-1) \quad \mid \cdot(-1) \\ + \\ + \\ + \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Also ist $E_B(4) = \operatorname{lin}\{\vec{q}_2, \vec{q}_3, \vec{q}_4\}$ mit

$$\vec{q}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{q}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{q}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Setze

$$\vec{p}_2 = \vec{q}_2, \quad \vec{p}_3 = \vec{q}_4 - \vec{q}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{p}_4 = \vec{q}_4.$$

Dann ist auch $E_B(4) = \operatorname{lin}\{\vec{p}_2, \vec{p}_3, \vec{p}_4\}$.

Nach der Vorlesung sind Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten von symmetrischen Matrizen immer orthogonal zueinander. Wir brauchen also nur den berechneten Erzeuger $\vec{p}_2, \vec{p}_3, \vec{p}_4$ von $E_B(4)$ dem Gram-Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren zu unterziehen:

Die ersten beiden Vektoren sind bereits orthogonal und müssen nur noch normiert werden:

$$\vec{b}_2 = \frac{\vec{p}_2}{\|\vec{p}_2\|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b}_3 = \frac{\vec{p}_3}{\|\vec{p}_3\|} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Ferner berechnet man

$$\vec{b}_4 = \vec{p}_4 - \underbrace{(\vec{p}_4|\vec{b}_2)}_{=\frac{1}{\sqrt{2}}}\vec{b}_2 - \underbrace{(\vec{p}_4|\vec{b}_3)}_{=\frac{1}{\sqrt{2}}}\vec{b}_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \left\|\vec{b}_4\right\| = 1.$$

Mit der orthogonalen Matrix

$$T = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3, \vec{b}_4) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

und der Diagonalmatrix

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

gilt dann

$$B = TDT^T.$$

(b) Es gilt für alle $k \in \mathbb{N}$:

$$B^k = (TDT^T)^k = TD\underbrace{T^{-1}T}_{=I_4}DT^{-1} \cdots TDT^{-1} = TD^kT^T$$

Wegen $D^k = 4^{k-1}D$ folgt:

$$B^k = T4^{k-1}DT^T = 4^{k-1}TDT^T = 4^{k-1}B$$

Aufgabe 44:
Wir versuchen die Eigenwerte der Matrix A_α abzuschätzen. Für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\begin{aligned} \chi_{A_\alpha}(\lambda) &= \det(A_\alpha - I_3\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 8-\lambda & \alpha \\ 0 & \alpha & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &\overset{\text{Sarrus}}{=} (1-\lambda)(8-\lambda)(1-\lambda) - 4(1-\lambda) - \alpha^2(1-\lambda) \\ &= (1-\lambda)((8-\lambda)(1-\lambda) - (4+\alpha^2)) \\ &= (1-\lambda)(\lambda^2 - 9\lambda + 4 - \alpha^2) \end{aligned}$$

Daraus lesen wir ab, dass $\lambda_1 = 1 \in \sigma(A_\alpha)$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$. Also ist A_α nie negativ (semi-) definit. Die zwei anderen Eigenwerte von A_α sind die Nullstellen des Polynoms $\lambda^2 - 9\lambda + 4 - \alpha^2$ und durch die p-q-Formel gegeben:

$$\lambda_2 = \frac{9}{2} + \sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2 - (4-\alpha^2)} \qquad \lambda_3 = \frac{9}{2} - \sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2 - (4-\alpha^2)}$$

Wegen $\lambda_2 > 0$ bestimmt nur das Vorzeichen von λ_3 die Definitheit von A_α. Ablesen liefert: ist $|\alpha| < 2$, so ist $\lambda_3 > 0$ und damit A_α positiv definit. Ist $|\alpha| = 2$, so ist $\lambda_3 = 0$ und damit A_α positiv semidefinit. Ist schließlich $|\alpha| > 2$, so ist $\lambda_3 < 0$ und damit A_α indefinit.