

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 08. Übungsblatt

Aufgabe 45:

- (a) (i) Sei $\vec{x} \in \cup_{j \in I} A_j$. Dann existiert ein $k \in I$ mit $\vec{x} \in A_k$. Da A_k offen ist, existiert ein $r > 0$ mit $K(\vec{x}_0, r) \subseteq A_k \subseteq \cup_{j \in I} A_j$. Da $\vec{x} \in \cup_{j \in I} A_j$ beliebig war, ist $\cup_{j \in I} A_j$ offen.

□

- (ii) Zu zeigen ist, dass $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ offen ist. Sei dazu $\vec{x} \in A^c \cap B^c$ beliebig. Dann ist $\vec{x} \in A^c$ und $\vec{x} \in B^c$. Da A^c und B^c offen sind, existieren $r_1, r_2 > 0$ derart, dass $K(\vec{x}, r_1) \subseteq A^c$ und $K(\vec{x}, r_2) \subseteq B^c$. Setze $r := \min\{r_1, r_2\} > 0$. Dann gilt

$$K(\vec{x}_0, r) \subseteq K(\vec{x}_0, r_1) \subseteq A^c \text{ und } K(\vec{x}_0, r) \subseteq K(\vec{x}_0, r_2) \subseteq B^c.$$

Also ist $K(\vec{x}_0, r) \subseteq A^c \cap B^c = (A \cup B)^c$.

□

- (iii) Es ist $A \setminus B = A \cap B^c = (A^c \cup B)^c$. Nach Voraussetzung ist A^c und B abgeschlossen. Nach Aufgabenteil (ii), ist also $A^c \cup B$ abgeschlossen. Damit ist $(A^c \cup B)^c = A \cap B^c = A \setminus B$ offen.

- (b) (i) Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x, y) = x^2 + 5y^2$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Dann ist f stetig auf \mathbb{R}^2 und es gilt

$$M_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < f(x, y) < 1\} = f^{-1}((0, 1)).$$

Nach Abschnitt 19.3 der Vorlesung, ist also M_1 als stetiges Urbild einer offenen Menge wieder offen.

Betrachte $(\vec{x}_k)_{k \in \mathbb{N}} = ((\frac{1}{2k}, 0))_{k \in \mathbb{N}}$. Dann ist $(\frac{1}{2k}, 0) \in M_1$ für alle $k \in \mathbb{N}$, aber $\lim_{k \rightarrow \infty} \vec{x}_k = \vec{0} \notin M_1$. Also ist M_1 nicht abgeschlossen, nach der Charakterisierung abgeschlossener Mengen aus dem Abschnitt 19.2 der Vorlesung.

- (ii) Seien $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2 + y^2 - 2xy \geq 3) \wedge (y \geq x)\}$ und $B = \{(0, 0)\}$. Dann ist $M_2 = A \cup B$. Aus der Vorlesung bekannt ist, dass endliche Mengen abgeschlossen sind. Wir zeigen, dass A abgeschlossen ist. Dann ist nach Aufgabenteil (a)(ii) auch M_2 abgeschlossen:

Sei dazu $(x_k, y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine gegen $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ konvergente Folge mit $(x_k, y_k) \in A$ für alle $k \in \mathbb{N}$. D.h., für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist $x_k^2 + y_k^2 - 2x_k y_k \geq 3$ und $y_k \geq x_k$. Wegen der Monotonie der Grenzwerte folgt damit aber auch, dass $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k^2 + y_k^2 - 2x_k y_k = x_0^2 + y_0^2 - 2x_0 y_0 \geq 3$ und $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = y_0 \geq x_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k$. Also in der Tat $(x_0, y_0) \in A$.

Es ist $\vec{x}_k := (\frac{1}{k}, 0) \in (A \cup B)^c = M_2^c$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Ferner ist $\lim_{k \rightarrow \infty} \vec{x}_k = \vec{0}$. Aber, wegen $\vec{0} \in M_2$, ist $\vec{0} \notin M_2^c$. Damit ist M_2^c nicht abgeschlossen und per Definition M_2 nicht offen.

Aufgabe 46:

(a) Klar: f ist stetig in jedem $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ als Komposition stetiger Funktionen.

Sei $(x_k, y_k)_{k \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^2)^{\mathbb{N}}$ mit $\lim_{k \rightarrow \infty} (x_k, y_k) \rightarrow (0, 0)$ und $(x_k, y_k) \neq (0, 0)$ für alle $k \in \mathbb{N}$ beliebig. Dann gilt

$$|f(x_k, y_k)| = \left| \frac{x_k y_k^2}{x_k^2 + y_k^2} \right| \stackrel{\text{A.-G.-Mittel}}{\leq} |y_k| \frac{x_k^2 + y_k^2}{2(x_k^2 + y_k^2)} = \frac{|y_k|}{2} \rightarrow 0 = f(0, 0)$$

für $k \rightarrow \infty$. Damit ist f stetig in $(0, 0)$.

(b) Die Funktion g ist unstetig in $(0, 0)$, denn $(\frac{1}{k^2}, \frac{1}{k}) \rightarrow (0, 0)$ für $k \rightarrow \infty$, aber

$$g\left(\frac{1}{k^2}, \frac{1}{k}\right) = \frac{\frac{1}{k^4}}{\frac{1}{k^4} + \frac{1}{k^4}} = \frac{1}{2} \not\rightarrow 0 = g(0, 0)$$

für $k \rightarrow \infty$.

Sei $\varphi \in \mathbb{R}$ beliebig. Angenommen, $\cos(\varphi) = 0$. Dann ist $\sin(\varphi) \neq 0$ und

$$g(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)) = \frac{r^3 \cos(\varphi) \sin^2(\varphi)}{r^2 \cos^2(\varphi) + r^4 \sin^4(\varphi)} = 0 \rightarrow 0 = g(0, 0)$$

für $r \rightarrow 0+$. Ist $\cos(\varphi) \neq 0$, so ist trotzdem

$$g(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)) = \frac{r^3 \cos(\varphi) \sin^2(\varphi)}{r^2 \cos^2(\varphi) + r^4 \sin^4(\varphi)} = r \frac{\cos(\varphi) \sin^2(\varphi)}{\cos^2(\varphi) + r^2 \sin^4(\varphi)} \rightarrow 0 = g(0, 0)$$

für $r \rightarrow 0+$.

(c) Die Funktion h ist unstetig in $(0, 0)$, denn $(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}) \rightarrow (0, 0)$ für $k \rightarrow \infty$, aber

$$h\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right) = \frac{\frac{1}{k^4}}{\frac{1}{k^4}} = 1 \not\rightarrow 0 = h(0, 0)$$

für $k \rightarrow \infty$.

Sei $x \neq 0$. Dann gilt

$$h(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2} \rightarrow \frac{0}{0 + \underbrace{(x - 0)^2}_{>0}} = 0$$

für $y \rightarrow 0$. Ist $x = 0$, so ist $h(x, y) = 0 \rightarrow 0$ für $y \rightarrow 0$. Also gilt in der Tat $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} h(x, y) = h(0, 0) = 0$. Wegen $h(x, y) = h(y, x)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt auch $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} h(x, y) = h(0, 0) = 0$.

Aufgabe 47:

Es gilt

$$\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ \frac{2}{\pi} \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \|\dot{\gamma}(t)\| = \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t) + \frac{4}{\pi^2}} = \sqrt{1 + \frac{4}{\pi^2}} \neq 0$$

für alle $t \in [0, 2\pi]$. Deshalb ist γ regulär. Ferner gilt:

$$\psi(t) := \int_0^t \|\dot{\gamma}(s)\| ds = \sqrt{1 + \frac{4}{\pi^2}} t$$

für alle $t \in [0, 2\pi]$. Es ist also $L(\gamma) = \psi(2\pi) = 2\sqrt{\pi^2 + 4}$. Die Parameterisierung nach Weglänge von γ ist durch

$$\gamma \circ \psi^{-1}(s) = \gamma \left(\frac{\pi}{\sqrt{4 + \pi^2}} s \right) = \begin{pmatrix} \cos \left(\frac{\pi}{\sqrt{4 + \pi^2}} s \right) \\ \sin \left(\frac{\pi}{\sqrt{4 + \pi^2}} s \right) \\ \frac{2}{\sqrt{4 + \pi^2}} s \end{pmatrix}$$

für alle $s \in [0, 2\sqrt{\pi^2 + 4}]$ gegeben.

Aufgabe 48:

Es gilt

$$\dot{\eta}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \\ 1 \\ -\frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \|\dot{\eta}(t)\| = \sqrt{\frac{1}{1-t^2} + 1 + \frac{t^2}{1-t^2}} = \sqrt{2} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \neq 0$$

für alle $t \in (-1, 1)$. Deshalb ist η regulär. Ferner gilt:

$$\psi(t) := \int_{-1}^t \|\dot{\eta}(s)\| ds = \sqrt{2} (\arcsin(t) - \arcsin(-1)) = \sqrt{2} \left(\arcsin(t) + \frac{\pi}{2} \right)$$

für alle $t \in [-1, 1]$. Es ist also $L(\eta) = \psi(1) = \sqrt{2}\pi$. Die Umkehrfunktion $\psi^{-1} : [0, \sqrt{2}\pi]$ ist durch

$$\psi^{-1}(s) = \sin \left(\frac{s}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{2} \right) = -\cos \left(\frac{s}{\sqrt{2}} \right)$$

für alle $s \in [0, \sqrt{2}\pi]$ gegeben. Die Parameterisierung nach Weglänge von η ist dann durch

$$\eta \circ \psi^{-1}(s) = \eta \left(-\cos \left(\frac{s}{\sqrt{2}} \right) \right) = \begin{pmatrix} \frac{s}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{2} \\ -\cos \left(\frac{s}{\sqrt{2}} \right) \\ \sin \left(\frac{s}{\sqrt{2}} \right) \end{pmatrix}$$

für alle $s \in [0, \sqrt{2}\pi]$ gegeben.

Aufgabe 49:

(a) Anwendung der eindimensionalen Differentiationsregeln liefert

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) &= ((1 + xy^2z^3)y^2z^3e^{xy^2z^3}, 2xe^y + \cos(x)) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) &= (2xyz^3(1 + xy^2z^3)e^{xy^2z^3}, x^2e^y) \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) &= (3xy^2z^2(1 + xy^2z^3)e^{xy^2z^3}, 0) \end{aligned}$$

für alle $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

(b) Anwendung der eindimensionalen Differentiationsregeln liefert

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) &= (ye^x + \sinh(y), 6x \sin(y), -3x^2) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= (e^x + x \cosh(y), 4y^3 + 3x^2 \cos(y), 4) \end{aligned}$$

für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(c) Anwendung der eindimensionalen Differentiationsregeln liefert

$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial r}(r, \varphi, \vartheta) &= (\cos(\varphi) \cos(\vartheta), \sin(\varphi) \cos(\vartheta), \sin(\vartheta)) \\ \frac{\partial h}{\partial \varphi}(r, \varphi, \vartheta) &= (-r \sin(\varphi) \cos(\vartheta), r \cos(\varphi) \cos(\vartheta), r \sin(\vartheta)) \\ \frac{\partial h}{\partial \vartheta}(r, \varphi, \vartheta) &= (-r \cos(\varphi) \sin(\vartheta), -r \sin(\varphi) \sin(\vartheta), r \cos(\vartheta))\end{aligned}$$

für alle $(r, \varphi, \vartheta) \in (0, \infty) \times (-\pi, \pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Aufgabe 50:

(a) Klar: f ist als Komposition stetiger Funktionen stetig in allen $(x, y) \neq (0, 0)$. Ferner gilt

$$\left| \frac{y^3 - x^2 y}{x^2 + y^2} \right| = |y| \left| \frac{y^2 - x^2}{x^2 + y^2} \right| \leq |y| \frac{y^2 + x^2}{x^2 + y^2} = |y|$$

für alle $(x, y) \neq (0, 0)$. Deshalb gilt in der Tat $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0)$. Also ist f stetig auf \mathbb{R}^2 .

(b) Für $(x, y) \neq 0$ gilt nach der Quotientenregel

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y \frac{-2x(x^2 + y^2) - (y^2 - x^2)2x}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{4xy^3}{(x^2 + y^2)^2}$$

bzw.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{(3y^2 - x^2)(x^2 + y^2) - (y^3 - x^2 y)2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^4 + 4x^2 y^2 - x^4}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Im Punkt $(0, 0)$ gilt hingegen

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0$$

bzw.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3}{h^2} = 1.$$

(c) Betrachte $(x_k, y_k) := (\frac{1}{k}, \frac{1}{k}) \rightarrow (0, 0)$ für $k \rightarrow \infty$. Es ist

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_k, y_k) = -\frac{4\frac{1}{k^4}}{4\frac{1}{k^4}} = -1 \not\rightarrow 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0).$$

Also ist $\frac{\partial f}{\partial x}$ unstetig bei $(0, 0)$.

Betrachte $(x_k, y_k) = (\frac{1}{k}, 0) \rightarrow (0, 0)$ für $k \rightarrow \infty$. Es ist

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_k, y_k) = -\frac{\frac{1}{k^4}}{\frac{1}{k^4}} = -1 \not\rightarrow 1 = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0).$$

Also ist auch $\frac{\partial f}{\partial y}$ unstetig bei $(0, 0)$.

(d) Sei $\vec{v} = (v_x, v_y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Nach Definition gilt:

$$D_v f(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t\vec{v}) - f((0, 0))}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^3(v_y^3 - v_x^2 v_y)}{t^3(v_x^2 + v_y^2)} = \frac{v_y^3 - v_x^2 v_y}{v_x^2 + v_y^2}$$

Ferner ist $(\nabla f)(0,0) \cdot \vec{v} = v_y$. Also gilt:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) = (\nabla f)(0,0) \cdot \vec{v} &\Leftrightarrow \frac{v_y^3 - v_x^2 v_y}{v_x^2 + v_y^2} = v_y \\ &\Leftrightarrow v_y^3 - v_x^2 v_y = v_x^2 v_y + v_y^3 \\ &\Leftrightarrow v_x^2 v_y = 0 \\ &\Leftrightarrow v_x = 0 \vee v_y = 0\end{aligned}$$

(e) Es gilt

$$D_v f(0,0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(t\vec{v}) - g((0,0))}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^3(v_x v_y^2)}{t^3 v_x^2 + t^5 v_y^4} = \begin{cases} 0, & v_x = 0 \\ \frac{v_y^2}{v_x}, & v_x \neq 0 \end{cases}$$

Aufgabe 51:

$$51, 1) g(y) - g(x) \quad y = x+h$$

$$\begin{aligned} \langle x+h, L(x+h) \rangle - \langle x, Lx \rangle &= \langle h, Lx \rangle + \langle x, Lh \rangle + \langle h, Lh \rangle \\ &= \langle h, Lx \rangle + \langle Lx, h \rangle + \langle h, Lh \rangle \\ &= 2\operatorname{Re}\langle Lx, h \rangle + \langle h, Lh \rangle \end{aligned}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|g(x+h) - g(x) - 2\operatorname{Re}\langle Lx, h \rangle|}{\|h\|} = \lim_{h \rightarrow 0} \|h\| \langle e_{n_1}, Le_{n_1} \rangle = 0 \Rightarrow$$

$$Dg(m_0)[v] = 2\operatorname{Re}\langle Lm_0, v \rangle = 2\operatorname{Re}\langle m_0, Lv \rangle$$

$$2) \langle x+h, L(x+h) \rangle = \langle x, Lx \rangle + \langle h, Lx \rangle + \langle x, Lh \rangle + \langle h, Lh \rangle$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|g(x+h) - g(x) - \langle h, Lx \rangle - \langle x, Lh \rangle|}{\|h\|} = 0$$

$$Dg(m_0)[v] = \overline{\langle x, L^*h \rangle} + \langle x, Lh \rangle$$