Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Prof. Dr. Dirk Hundertmark
Dr. Michal Jex

SS2017/18
18.6.2018

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

9. Übungsblatt

Aufgabe 52:
Betrachten Sie die Funktionen $f : D \to \mathbb{R}^3$ und $g : E \to \mathbb{R}$ mit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y > 0\}$ und $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z > 0\}$, sowie

$$f(x, y) = (\log(xy), \cos(x^2 + y), e^x) \qquad \text{und} \qquad g(x, y, z) = e^x + yz + \log(z)$$

(a) Berechnen Sie die Matrizen, die der Ableitungen von f, g darstellen.

(b) Berechnen Sie mit Hilfe der Kettenregel die Ableitung $D(g \circ f)$.

(c) Berechnen Sie die Ableitung $D(g \circ f)$, indem Sie $g \circ f$ explizit berechnen und dann ableiten.

Aufgabe 53:
Betrachten Sie die Funktionen $f, g, h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, welche durch

$$f(x, y) = (x^2, y^2), \qquad g(x, y) = (\sin(xy), e^{x+y}), \qquad h(x, y) = (e^x \cos(y), \sinh(x))$$

für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ gegeben sind.

(a) Berechnen Sie die Matrizen, die der Ableitungen von f, g, h darstellen.

(b) Berechnen Sie mit Hilfe der Kettenregel die Ableitungen $D(g \circ f), D(h \circ g)$.

(c) Berechnen Sie die Ableitungen $D(g \circ f), D(h \circ g)$, indem Sie $g \circ f$ bzw. $h \circ g$ explizit berechnen und dann ableiten.

Aufgabe 54: Sei $\mathcal{L}(V, W)$ die Menge der linearen Abbildungen $L : V \to W$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{L}(V, W)$ normierte Vektorraum mit Norm gegeben durch die Operatornorm ist

$$\|L\| = \|L\|_{V \to W} := \sup_{u \in V, u \neq 0} \frac{\|Lu\|_W}{\|u\|_V}$$

Aufgabe 55: Sei W_l ein Banach-Raum für $1 \le l \le n$ mit Norm $\|\cdot\|_{W_l}$. Sei $y \in W_1 \times \ldots \times W_n =: W$ ein Vektor $y = (y_1, \ldots, y_n)^T$ wobei $y_j \in W_j$. Zeigen Sie, dass die folgende Funktionen Normen im Vektorraum W sind

$$\|y\|_\infty = \max_{1 \le j \le n} \|y_j\|_{W_j} ,$$

$$\|y\|_p = \left(\sum_{j=1}^{n} \|y_j\|_{W_j}^p \right)^{\frac{1}{p}} , \quad p \ge 1 .$$

Beweisen Sie auch, dass $\|y\|_p$ und $\|y\|_\infty$ äquivalent sind, d.h. $\exists C_1, C_2 \forall y \in W : C_1 \|y\|_\infty \le \|y\|_p \le C_2 \|y\|_\infty$.

— Bitte wenden! —

Aufgabe 56: Sei $L : V \to W$ ein linear Abbildung und sei W ein Banachraum. Dann sind die Folgende äquivalent

1. L ist stetig
2. L ist lokal gleichmäßig stetig, d.h. für jede Kugel $B_R^V(0)$ ist L auf $B_R^V(0)$ gleichmäßig stetig,
3. L ist im 0 stetig,
4. $\sup_{v\in V\setminus\{0\}} \frac{\|Lv\|_W}{\|v\|_V} < \infty$.

Aufgabe 57: Sei $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, W)$. Dann ist $Lh = \sum_{j=1}^n u_j h_j$ mit $Le_j = u_j$. Also ist jede Funktion $g : \mathbb{R}^n \ni U \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, W)$ gegeben durch den Funktionen $u_j : U \to W$ $j = 1, \dots, n$ und $g(x)[h] = \sum_{j=1}^n u_j(x)h_j = \sum_{j=1}^n (u_1(x), \dots, u_n(x)) \cdot h$. Zeigen Sie dass

$$g \,\text{ist stetig in}\, x_0 \Leftrightarrow \forall j = 1, \dots, n : u_j : U \to W \,\text{ist stetig in}\, x_0$$

Hinweis: Man benutzt z.B. $\|\cdot\|_\infty$ auf $\mathbb{R}^n$. Für die Richtung "$\Rightarrow$" nimmt man gute Wahl von h. Für die Richtung "$\Leftarrow$": $\|g(x) - g(y)\| = \sup_{\|h\|_\infty=1} \|(g(x) - g(x_0))[h]\|_W \leq \sum_{j=1}^n \|u_j(x) - u_j(y)\|_W$

Übungsklausur:

- Die Übungsklausur findet am *Samstag, den 30. Juni 2018*, von *11:00 bis 13:00* im **10.21 Benz-Hörsaal** statt.
- Studenten, die die Übungsklausur als Prüfungsleistung einbringen können und wollen, müssen sich im Sekretariat bei Frau Dr. Nagato-Plum anmelden. Anderenfalls ist eine Anmeldung nicht erforderlich. Anmeldefrist läuft am *27. Juni 2018 um 12:00* ab.
- Zugelassene Hilfmittel sind ausschließlich drei handbeschriftete DIN A4 Blätter (sechs Seiten).
- Themenumfang der Übungsklausur ist der gesamte bis zum *22. Juni 2018* in den Vorlesungen und Übungen behandelte Stoff.
- Beachten Sie weitere Hinweise auf der Homepage der Veranstaltung.

Hinweis: In der großen Saalübung werden voraussichtlich die Aufgaben 55, 56 und 57 besprochen. Die restlichen Aufgaben werden in den Tutorien behandelt.