Karlsruher Institut für Technologie

**Institut für Analysis**
Prof. Dr. Dirk Hundertmark
Dr. Michal Jex

SS2017/18
25.6.2018

# Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

## 10. Übungsblatt

**Aufgabe 58:**
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ und seien $f, g : U \to \mathbb{R}^m$ Funktionen, die in $x_0 \in U$ differenzierbar sind. Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^m$. Wir definieren die Funktion $h : U \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \langle f(x), g(x) \rangle$.

1. Zeigen Sie, dass $h$ differenzierbar in $x_0$ ist.

2. Berechnen Sie die Ableitung $Dh(x_0)$.

**Aufgabe 59:**
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \in U$ mit $\nabla f(x_0) \neq 0$. Wir betrachten die Sphäre $S^{d-1} := \{u \in \mathbb{R}^n | \, \|u\| = 1\}$ und die Funktion $g : S^{d-1} \to \mathbb{R}$, $u \mapsto D_u f(x_0)$. Zeigen Sie, dass $g$ sein Maximum an der Stelle $u = \frac{\nabla f(x_0)}{\|\nabla f(x_0)\|}$ annimmt.

**Aufgabe 60:**
Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ eine Matrix. Wir definieren die Hilbert-Schmidt Norm als $\|A\|_{HS}^2 := \sum_{jk} A_{jk}^2$. Zeigen Sie

$$\|A\| := \sup_{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} \leq \|A\|_{HS} \,.$$

**Aufgabe 61:**
Bestimmen Sie alle Stellen lokaler Extrema der jeweiligen Funktion und entscheiden Sie, ob es sich dabei um Maxima oder Minima handelt.

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = xy + x - 2y - 2 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$

(b) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(x, y) = 2x^3 - 3xy + 2y^3 - 3 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$

(c) $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $h(x, y) = (2x + 2y + 3)e^{-x^2 - y^2} \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$

**Aufgabe 62:**
Sei $V = \mathbb{R}^n$ ein endlichdimensionaler Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Sei $A : V \to V$ ein selbstadjungiert Operator und sei $g : V \to \mathbb{R}, u \mapsto g(u) = \langle u, Lu \rangle$.

(a) Zeigen Sie, dass $\forall x \in \mathbb{R}^n : D_g^2(x)[u, v] = 2\langle u, Av \rangle$.

(b) Was ist die zweite Ableitung, wenn $L$ nicht selbstadjungiert ist?

**— Bitte wenden! —**

**Aufgabe 63:**
Wir wissen aus HM1:

> Sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto g(x, y)$ eine $C^1$ Funktion in der Variable $x$. Dann ist $\int_a^b g(x, y)dy$ eine $C^1$ Funktion in der Variable $x$ und es gilt $\frac{d}{dx} \int_a^b g(x, y)dy = \int_a^b \frac{\partial g(x,y)}{\partial x} dy$.

Ziel dieser Aufgabe ist:

> Sei $g$ wie oben und $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto a(x)$, $x \mapsto b(x)$ $C^1$ Funktionen. Wir definieren
>
> $$f(x) := \int_{a(x)}^{b(x)} g(x, y)dy \,.$$
>
> Dann gilt:
>
> $$f'(x) = b'(x)g(x, b(x)) - a'(x)g(x, a(x)) + \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial g(x, y)}{\partial x} dy \,. \qquad (\star)$$

(a) Sei $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ eine $C^1$ Funktion (alle partiallen Ableitungen von $F$ existieren) und definiere $f(x) := F(x, x, x)$. Zeigen Sie: $f$ ist eine $C^1$ Funktion und

$$f'(x) = \partial_1 F(x, x, x) + \partial_2 F(x, x, x) + \partial_3 F(x, x, x) \,.$$

*Hinweis*: Kettenregel

(b) Setzen Sie

$$F(x_1, x_2, x_3) := \int_{a(x_1)}^{b(x_2)} g(x_3, y)dy$$

und benutzen Sie a) um $(\star)$ zu zeigen.

**Hinweis:** In der großen Saalübung werden voraussichtlich die Aufgaben 58, 59 und 63 besprochen. Die restlichen Aufgaben werden in den Tutorien behandelt.