Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Prof. Dr. Dirk Hundertmark
Dr. Michal Jex

SS2017/18
2.7.2018

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

11. Übungsblatt

Aufgabe 64:
Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, welche durch

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} (2+\arctan(x))\sin(y) \\ -e^x\cos(y) \end{pmatrix}$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ gegeben ist.

(a) Zeigen Sie, dass es eine offene Menge $U \ni (0, \frac{\pi}{4})$ und eine offene Menge $V \ni (\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ gibt, so dass U durch f bijektiv auf V abgebildet wird. Berechnen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion in $(\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$.

(b) Zeigen Sie, dass f in jedem Punkt $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ lokal invertierbar ist, aber dass $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ nicht injektiv ist.

Aufgabe 65:

(a) Sei $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$F(x,y,z) = z^3 + 2z^2 - 3xyz + x^3 - y^3$$

für alle $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Zeigen Sie, dass eine offene Menge $(0,0) \in U \subseteq \mathbb{R}^2$ und eine offene Menge $-2 \in V \subseteq \mathbb{R}$, sowie ein $\varphi \in C^1(U,V)$ existieren mit

$$F(x,y,z) = 0 \Leftrightarrow z = \varphi(x,y)$$

für alle $(x,y) \in U$ und alle $z \in V$.

Berechnen Sie φ'.

(b) Betrachten Sie die Gleichungen

$$x^2 + y^2 - u^2 + v^2 = 0 \qquad \text{und} \qquad x^2 + 2y^2 - 3u^2 + 4v^2 = 1$$

mit $(x,y,u,v) \in \mathbb{R}^4$. Zeigen Sie, dass durch diese Gleichungen auf einer offenen Menge $(0,0) \in U \subseteq \mathbb{R}^2$ zwei Funktionen $u, v \in C^1(U)$ mit $u(0,0) = v(0,0) = 1$ implizit definiert werden.

Berechnen Sie $u'(0,0)$, sowie $v'(0,0)$.

Aufgabe 66: *Beste lineare Approximation*
Sei $f_{\alpha,\beta}(x) = \alpha x + \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Zu gegebenem $(x_j, y_j) \in \mathbb{R}^2$, $j = 1, 2, \ldots, L$ finden Sie α und β so, dass $F(\alpha,\beta) = \sum_{j=1}^{L}(y_j - f_{\alpha,\beta}(x_j))^2$ kleinstmöglich ist.

— Bitte wenden! —

Aufgabe 67:
Es sei $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x+y+z>1) \wedge (y+z>-1)\}$ und $F : D \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$F(x,y,z) = \frac{1}{1+y+z} + \log(x+y+z-1)$$

für alle $(x,y,z) \in D$.

(a) Zeigen Sie, dass eine offene Menge $(\frac{1}{\sqrt{e}}, 0) \in U \subseteq \mathbb{R}^2$ und eine offene Menge $1 \in V \subseteq \mathbb{R}$, sowie ein $\varphi \in C^1(U,V)$ existieren mit $F(x,y,z) = 0 \Leftrightarrow z = \varphi(x,y)$ für alle $(x,y) \in U$ und alle $z \in V$.

(b) Zeigen Sie, dass eine offene Menge $\frac{1}{\sqrt{e}} \in U_1 \subseteq \mathbb{R}$ und eine offene Menge $0 \in U_2 \subseteq \mathbb{R}$, sowie ein streng monoton fallendes $\varphi_1 \in C^1(U_1, \mathbb{R})$ existieren mit $\varphi(x,y) = \varphi_1(x) - y$ für alle $x \in U_1$ und alle $y \in U_2$.

Aufgabe 68:
Es seien

$$A = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + 2x_2^2 = 6\} \quad \text{und} \quad B = \{(y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2 : y_1 + y_2 = 5\}.$$

Zeigen Sie, dass ein $x_0 \in A$ und ein y_0 in B existiert, mit

$$\|x_0 - y_0\| = d(A,B) := \inf_{x \in A, y \in B} \{\|x-y\|\}.$$

Berechnen Sie den Wert von $d(A,B)$ mit Hilfe der Multiplikatorenregel von Lagrange.

Aufgabe 69:
Berechnen Sie die globalen Extrema der Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y,z) = 5x + y - 3z$$

für alle $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ auf der Menge

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x+y+z=0) \wedge (x^2+y^2+z^2=1)\}.$$

Aufgabe 70: *Alternativer Beweis des verallgemeinerten binomischen Satzes*
Sei $y \in \mathbb{R}^n$ fest, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g_x(t) := \exp(t\langle x,y\rangle)$ eine Funktion und $k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $k(tx) = \exp(\langle tx,y\rangle)$ eine Funktion.

(a) Berechnen Sie $g^{(s)}(t)$. (s-te Ableitung von g)

(b) Zeigen Sie, dass $D^s k(tx)[x,\ldots,x] = \sum_{|\alpha|=s, \alpha\in\mathbb{N}_0^n} x^\alpha \frac{s!}{\alpha!} \partial^\alpha \exp(\langle tx,y\rangle)$.

(c) Warum ist $D^s k(tx)[x,\ldots,x] = g^{(s)}(t)$.

(d) Zeigen Sie $(y_1+\ldots+y_n)^s = \sum_{|\alpha|=s,\alpha\in\mathbb{N}_0^n} \frac{s!}{\alpha!} y^\alpha$ mit der richtigen Wahl von x und t.

Bemerkung: Ist $n=2$, so erhalt man den binomischen Satz aus HM1.

Hinweis: In der großen Saalübung werden voraussichtlich die Aufgaben 66, 68, 69 und 70 besprochen. Die restlichen Aufgaben werden in den Tutorien behandelt.