Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Prof. Dr. Dirk Hundertmark
Dr. Michal Jex

SS2017/18
22.6.2018

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 11. Übungsblatt

Aufgabe 64:
Wir berechnen vorbereitend für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$f'(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sin(y)}{1+x^2} & (2+\arctan(x))\cos(y) \\ -e^x\cos(y) & e^x\sin(y) \end{pmatrix}$$

(a) Wir stellen die Voraussetzungen des Umkehrsatzes aus der Vorlesung sicher. Es ist in der Tat

$$f\left(0, \frac{\pi}{4}\right) = \begin{pmatrix} (2+\arctan(0))\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ -e^0\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

Wir versuchen die Inverse von

$$f'\left(0, \frac{\pi}{4}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \sqrt{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

zu berechnen:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} \frac{\sqrt{2}}{2} & \sqrt{2} & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ +\end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} \frac{\sqrt{2}}{2} & \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3\sqrt{2}}{2} & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} + \\ \cdot\left(-\frac{2}{3}\right) \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{3\sqrt{2}}{2} & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \mid \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} \\ \mid \cdot \frac{2}{3\sqrt{2}} \end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 & 1 & \frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{3} \end{array}\right)$$

Also ist $f'\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ in der Tat invertierbar. Nach dem Umkehrsatz existieren die gesuchten offenen Mengen U und V. Ebenfalls nach dem Umkehrsatz gilt für die Ableitung der Umkehrfunktion $f^{-1} : V \to U$

$$(f^{-1})'\left(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = (f^{-1})'\left(f\left(0, \frac{\pi}{4}\right)\right) = \left[f'\left(0, \frac{\pi}{4}\right)\right]^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix}$$

(b) Es gilt nach obiger Rechnung

$$\det(f'(x,y)) = \frac{\sin^2(y)e^x}{1+x^2} + e^x(2+\arctan(x))\cos^2(y)$$

für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Wegen $\sin(y) = 0 \Leftrightarrow y \in \pi\mathbb{Z}$ und $\cos(y) = 0 \Leftrightarrow y \in \pi(\frac{1}{2} + \mathbb{Z})$ werden die $\sin^2$ bzw. $\cos^2$-Terme nie gleichzeitig verschwinden. Also ist $\det(f'(x, y)) > 0$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Damit ist der Umkehrsatz überall anwendbar, d.h. f ist überall lokal invertierbar.

Wegen

$$f(x, y+2\pi) = \begin{pmatrix} (2+\arctan(x))\sin(y+2\pi) \\ -e^x\cos(y+2\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2+\arctan(x))\sin(y) \\ -e^x\cos(y) \end{pmatrix} = f(x,y)$$

für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ist f nicht injektiv.

Aufgabe 65:

(a) Klar: $F \in C^1(\mathbb{R}^3)$. Ferner gilt $F(0,0,-2) = (-2)^3 + 2(-2)^2 = 0$, sowie

$$\begin{aligned} F'(x,y,z) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3yz + 3x^2 & -3xz - 3y^2 & 3z^2 + 4z - 3xy \end{pmatrix} \end{aligned}$$

für alle $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Insbesondere ist $\frac{\partial F}{\partial z}(0,0,-2) = 3(-2)^2 + 4(-2) = 4 \neq 0$. Nach dem Satz über implizit definierte Funktionen, existieren U, V und φ mit den geforderten Eigenschaften. Für die Ableitung φ' gilt

$$\begin{aligned} \varphi'(x,y) &= -\left(\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,\varphi(x,y))\right)^{-1} \cdot \frac{\partial F}{\partial(x,y)}(x,y,\varphi(x,y)) \\ &= -\frac{1}{3\varphi^2(x,y) + 4\varphi(x,y) - 3xy} \cdot \begin{pmatrix} -3y\varphi(x,y) + 3x^2 & -3x\varphi(x,y) - 3y^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

für alle $(x,y) \in U$.

(b) Definiere $G : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ durch

$$G(x,y,u,v) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 - u^2 + v^2 \\ x^2 + 2y^2 - 3u^2 + 4v^2 - 1 \end{pmatrix}$$

für alle $(x,y,u,v) \in \mathbb{R}^4$. Die Aufgabe besteht offenbar darin, die Gleichung $G(x,y,u,v) = \vec{0}$ in der Nähe des Punktes $(x,y,u,v) = (0,0,1,1)$ nach (u,v) aufzulösen.

Klar: $G \in C^1(\mathbb{R}^4)$. Ferner gilt

$$G(0,0,1,1) = \begin{pmatrix} 0^2 + 0^2 - (1)^2 + (1)^2 \\ 0^2 + 2 \cdot 0^2 - 3 \cdot (1)^2 + 4 \cdot (1)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

sowie

$$\begin{aligned} G'(x,y,u,v) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial x}(x,y,u,v) & \frac{\partial G_1}{\partial y}(x,y,u,v) & \frac{\partial G_1}{\partial u}(x,y,u,v) & \frac{\partial G_1}{\partial v}(x,y,u,v) \\ \frac{\partial G_2}{\partial x}(x,y,u,v) & \frac{\partial G_2}{\partial y}(x,y,u,v) & \frac{\partial G_2}{\partial u}(x,y,u,v) & \frac{\partial G_2}{\partial v}(x,y,u,v) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2x & 2y & -2u & 2v \\ 2x & 4y & -6u & 8v \end{pmatrix} \end{aligned}$$

für alle $(x,y,u,v) \in \mathbb{R}^4$. Versuche die (2×2)-Matrix $\frac{\partial G}{\partial(u,v)}(0,0,1,1)$ zu invertieren:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial G}{\partial(u,v)}(0,0,1,1) \middle| I_2\right) &\sim \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 & 0 \\ -6 & 8 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(-3) \\ + \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} + \\ \cdot(-1) \end{matrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \mid \cdot\left(-\frac{1}{2}\right) \\ \mid \cdot\left(\frac{1}{2}\right) \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &\sim \left(I_2 \middle| \left(\frac{\partial G}{\partial(u,v)}(0,0,1,1)\right)^{-1}\right) \end{aligned}$$

Nach dem Satz über implizit definierte Funktionen existiert eine offene Menge $(0,0) \in U \subseteq \mathbb{R}^2$, eine offene Menge $(1,1) \in V \subseteq \mathbb{R}^2$, sowie ein $\varphi \in C^1(U,V)$ mit

$$G(x,y,u,v) = 0 \Leftrightarrow (u,v) = (\varphi_1(x,y), \varphi_2(x,y))$$

für alle $(x,y) \in U$ und alle $(u,v) \in V$. Für die Ableitung φ' gilt

$$\varphi'(x,y) = -\left(\frac{\partial G}{\partial(u,v)}(x,y,\varphi(x,y))\right)^{-1} \cdot \frac{\partial F}{\partial(x,y)}(x,y,\varphi(x,y))$$

für alle $(x,y) \in U$. Insbesondere gilt für $(x,y) = (0,0)$

$$\varphi'(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Damit ist $u'(0,0) = (0,0) = v'(0,0)$.

Auf 66)

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha}(\alpha,\beta) = \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\sum_{j=1}^{L}\left(y_j - \alpha x_j - \beta\right)^2\right) = -2\sum_{j=1}^{L} x_j\left(y_j - \alpha x_j - \beta\right) \stackrel{!}{=} 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \beta}(\alpha,\beta) = -2\sum_{j=1}^{L}\left(y_j - \alpha x_j - \beta\right) \stackrel{!}{=} 0 \quad (2)$$

$$(2) \Rightarrow 0 = -L\beta + \sum_{j=1}^{L}\left(y_j - \alpha x_j\right) \Rightarrow \beta = \frac{1}{L}\sum_{j=1}^{L}\left(y_j - \alpha x_j\right) \quad (3)$$

$$(1)+(3) \Rightarrow 0 = \sum_{j=1}^{L} x_j\left[y_j - \alpha x_j - \frac{1}{L}\sum_{k=1}^{L}\left(y_k - \alpha x_k\right)\right] \Rightarrow \sum_{j,k=1}^{L}\frac{1}{L} y_k x_j - \alpha\frac{1}{L}\sum_{j,k=1}^{L} x_k x_j = \sum_{j=1}^{L} x_j y_j - \alpha\sum_{j=1}^{L} x_j^2$$

$$\alpha = \frac{\sum_{j,k=1}^{L} y_k\left(\delta_{kj} x_j - x_j \frac{1}{L}\right)}{-\sum_{j,k=1}^{L} x_j\left(\frac{1}{L} x_k - x_k \delta_{kj}\right)}$$

$$\beta = \frac{1}{L}\sum_{j=1}^{L}\left(y_j - \alpha x_j\right)$$

$$D^2F = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2} & \frac{\partial F}{\partial \alpha \partial \beta} \\ \frac{\partial F}{\partial \beta \partial \alpha} & \frac{\partial^2 F}{\partial \beta^2} \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = M \qquad \begin{aligned} a &= \sum x_j^2 \\ b &= \sum x_j \\ c &= L \end{aligned}$$

$$\det(M - \lambda) = \lambda^2 - \lambda(a+c) + ac - b^2$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{a+c \pm \sqrt{(a+c)^2 - 4ac + 4b^2}}{2} = \frac{a+c \pm \sqrt{(a-c)^2 + 4b^2}}{2}$$

$$(a-c)^2 + 4b^2 \stackrel{?}{\leq} (a+c)^2$$

$$4b^2 \stackrel{?}{\leq} 4ac$$

$$\left(\sum_{j=1}^{L} x_j\right)^2 \stackrel{?}{\leq} L\sum_{j=1}^{L} x_j^2$$

$$0 \leq \sum_{j,k=1}^{L} x_j^2 - x_j x_k = \sum_{j,k=1}^{L} \frac{1}{2}x_j^2 - x_j x_k + \frac{1}{2}x_k^2 = \sum_{j,k=1}^{L}\frac{1}{2}\left(x_j - x_k\right)^2 \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2 > 0$$

M positiv definit $\Rightarrow$ MIN

Aufgabe 67:

(a) Klar: $F \in C^1(D)$. Ferner gilt

$$F\left(\frac{1}{\sqrt{e}}, 0, 1\right) = \frac{1}{1+0+1} + \log\left(\frac{1}{\sqrt{e}} + 0 + 1 - 1\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0,$$

sowie

$$\begin{aligned} F'(x,y,z) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{x+y+z-1} & -\frac{1}{(1+y+z)^2} + \frac{1}{x+y+z-1} & -\frac{1}{(1+y+z)^2} + \frac{1}{x+y+z-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

für alle $(x,y,z) \in D$. Insbesondere ist

$$\frac{\partial F}{\partial z}\left(\frac{1}{\sqrt{e}}, 0, 1\right) = -\frac{1}{(1+0+1)^2} + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{e}} + 0 + 1 - 1} = \sqrt{e} - \frac{1}{4} \neq 0.$$

Nach dem Satz über implizit definierte Funktionen, existieren U, V und φ mit den geforderten Eigenschaften.

$\square$

(b) Für die Ableitung φ' gilt

$$\begin{aligned} \varphi'(x,y) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = -\left(\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,\varphi(x,y))\right)^{-1} \cdot \frac{\partial F}{\partial(x,y)}(x,y,\varphi(x,y)) \\ &= \frac{1}{\frac{1}{(1+y+\varphi(x,y))^2} - \frac{1}{x+y+\varphi(x,y)-1}} \begin{pmatrix} \frac{1}{x+y+\varphi(x,y)-1} & -\frac{1}{(1+y+\varphi(x,y))^2} + \frac{1}{x+y+\varphi(x,y)-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\frac{x+y+\varphi(x,y)-1}{(1+y+\varphi(x,y))^2} - 1} & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

für alle $(x,y) \in U$. Wähle $\varepsilon > 0$ so klein, dass

$$\left(\frac{1}{\sqrt{e}} - \varepsilon, \frac{1}{\sqrt{e}} + \varepsilon\right) \times (-\varepsilon, +\varepsilon) =: U_1 \times U_2 \subseteq U$$

(dies funktioniert, weil U offen ist und $\left(\frac{1}{\sqrt{e}}, 0\right) \in U$). Nach dem Hauptsatz der Analysis gilt für jedes $x \in U_1$ und alle $y \in U_2$

$$\varphi(x,y) = \varphi(x,0) + \int_0^y \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,t)\mathrm{d}t = \varphi(x,0) - y$$

Setze $\varphi_1(x) := \varphi(x,0)$ für alle $x \in U_1$. Klar: $\varphi_1 \in C^1(U_1)$ und $\varphi(x,y) = \varphi_1(x) - y$ für alle $x \in U_1$ und alle $y \in U_2$. Bleibt nachzuweisen, dass φ_1 streng monoton fallend ist. Betrachte dazu

$$\varphi_1'(x) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,0) = \frac{1}{\frac{x+0+\varphi(x,0)-1}{(1+0+\varphi(x,0))^2} - 1} = \frac{1}{\frac{x+\varphi_1(x)-1}{(1+\varphi_1(x))^2} - 1}$$

für alle $x \in U_1$. Insbesondere ist, wegen $\varphi_1\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = \varphi\left(\frac{1}{\sqrt{e}}, 0\right) = 1$, für $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$ ist

$$\varphi'\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = \frac{1}{\frac{\frac{1}{\sqrt{e}}+1-1}{(1+1)^2} - 1} = \frac{1}{\frac{1}{4\sqrt{e}} - 1}.$$

Das Vorzeichen des Nenners ist wegen $1 < \sqrt{e}$ bzw. $\frac{1}{4\sqrt{e}} < \frac{1}{4}$ negativ. Damit ist $\varphi'\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) < 0$. Da φ_1' stetig ist, lässt sich ε nötigenfalls verkleinern, damit $\varphi'(x) < 0$ für alle $x \in U_1$ gilt. Also ist φ_1 in der Tat streng monoton fallend auf einer offenen Menge $\frac{1}{\sqrt{e}} \in U_1$.

$\square$

Aufgabe 68:
Für $\vec{x} = (2,1)$ und $\vec{y} = (4,1)$ ist $\vec{x} \in A$ und $\vec{y} \in B$. Damit ist $\|\vec{x} - \vec{y}\| = 2 \geq d(A,B)$. Ferner gilt für alle $\vec{x} = (x_1, x_2) \in A$

$$\|\vec{x}\|^2 = x_1^2 + x_2^2 \leq x_1^2 + 2x_2^2 = 6 < 9,$$

also $\|\vec{x}\| < 3$. Ferner gilt für alle $\vec{y} \in B$ mit $\|\vec{y}\| > 5$

$$\|\vec{x} - \vec{y}\| \geq |\|\vec{x}\| - \|\vec{y}\|| = \|\vec{y}\| - \|\vec{x}\| > 5 - 3 = 2 \geq d(A,B).$$

Ist $\|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 > 36$, so ist nach Obigem $\|\vec{y}\|^2 > 36 - \|\vec{x}\|^2 > 25$, also $\|\vec{y}\| > 5$ und $\|\vec{x} - \vec{y}\| > 2$. Betrachte $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$F(x_1, x_2, y_1, y_2) = \|(x_1 - y_1, x_2 - y_2)\|^2$$

für alle $(x_1, x_2, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^4$. Klar: $F \in C^1(\mathbb{R}^4)$. Ferner sei $G : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$G(x_1, x_2, y_1, y_2) = \begin{pmatrix} x_1^2 + 2x_2^2 - 6 \\ y_1 + y_2 - 5 \end{pmatrix}$$

für alle $(x_1, x_2, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^4$. Ebenfalls klar: $G \in C^1(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^2)$. Nach obiger Rechnung gilt $F(x_1, x_2, y_1, y_2) > 4$ für alle $\|(x_1, x_2, y_1, y_2)\| > 6$ und $F(2,1,4,1) = 4$, wobei $G(2,1,4,1) = \vec{0}$ und $\|(2,1,4,1)\| = \sqrt{22} < 6$. Es folgt also

$$\inf\left\{F(\vec{v}) : \vec{v} \in \mathbb{R}^4 \wedge G(\vec{v}) = \vec{0}\right\} = \inf\left\{F(\vec{v}) : \vec{v} \in \overline{K}(\vec{0}, 6) \wedge G(\vec{v}) = \vec{0}\right\} = \inf_{\vec{v} \in S} F(\vec{v})$$

mit $S = G^{-1}\left(\left\{\vec{0}\right\}\right) \cap \overline{K}(0,6)$. Da G stetig ist und $\left\{\vec{0}\right\} \subseteq \mathbb{R}^2$ abgeschlossen, ist auch $G^{-1}\left(\left\{\vec{0}\right\}\right)$ abgeschlossen. Nach der Vorlesung ist $\overline{K}(\vec{0}, 6)$ abgeschlossen. Damit ist S beschränkt und abgeschlossen, also nach der Vorlesung kompakt. Ebenfalls nachder Vorlesung, existiert ein $\vec{v_0} \in S$ mit

$$F(\vec{v_0}) = \min_{\vec{v} \in S} F(\vec{v}).$$

Die gesuchten Vektoren sind also gerade $\vec{x_0} = (v_1, v_2)$ bzw. $\vec{y_0} = (v_3, v_4)$.
Die Stelle $\vec{v}$ des globalen Minimums von F unter der Nebenbedingung $G = \vec{0}$ ist natürlich auch eine Stelle eines lokalen Extremums von F unter der Nebenbedingung $G = \vec{0}$. Wir wenden die Multiplikatorenregel von Lagrange an, um diese zu identifizieren: Es ist

$$G'(x_1, x_2, y_1, y_2) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 4x_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

für alle $(x_1, x_2, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^4$. Wegen $G(x_1, x_2, y_1, y_2) = \vec{0} \Rightarrow x_1, x_2 \neq 0$, hat G' auf $G^{-1}\left(\left\{\vec{0}\right\}\right)$ den vollen Rang 2. Es existiert $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ mit

$$F'(x_1, x_2, y_1, y_2) = \vec{\lambda}^T G'(x_1, x_2, y_1, y_2).$$

Zusammen mit der Nebenbedingung $G(x_1, x_2, y_1, y_2) = \vec{0}$ ergibt es die folgenden sechs Gleichungen:

$$\begin{aligned} 2(x_1 - y_1) &= 2x_1\lambda_1 && (1) \\ 2(x_2 - y_2) &= 4x_2\lambda_1 && (2) \\ -2(x_1 - y_1) &= \lambda_2 && (3) \\ -2(x_2 - y_2) &= \lambda_2 && (4) \\ x_1^2 + 2x_2^2 &= 6 && (5) \\ y_1 + y_2 &= 5 && (6) \end{aligned}$$

Wir wollen zunächst $\lambda_1 \neq 0$ einsehen: Wäre $\lambda_1 = 0$, dann folgte aus (1) und (2) $x_1 = y_1$ und $x_2 = y_2$. Dann wäre mit (6) $x_1 = 5 - x_2$ und mit (5) $(5-x_2)^2 + 2x_2^2 = 6$, bzw. $x_2^2 - \frac{10}{3}x_2 + \frac{19}{3} = 0$. Wegen $\left(\frac{5}{3}\right)^2 < \frac{19}{3}$ hat diese Gleichung keine reellen Lösungen. Also ist in der Tat $\lambda_1 \neq 0$. Einsetzen von (3) in (1) und (4) in (2) liefert

$$2x_1\lambda_1 = -\lambda_2 = 4x_2\lambda_1.$$

Da $\lambda_1 \neq 0$ nach Obigem, muss

$$x_1 = 2x_2 \tag{7}$$

gelten. Einsetzen in (5) liefert $x_2^2 = 1$, also $x_2 \in \{-1, 1\}$. Differenzbildung von (3) und (4) liefert $(x_1 - x_2) + (y_2 - y_1) = 0$. Einsetzen von (7) und (6) liefert $y_1 = \frac{5+x_2}{2}$. Wieder (6) liefert schließlich $y_2 = \frac{5-x_2}{2}$. Zusammenfassend ergibt sich:

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & 2x_2 \\ x_2 & \in & \{-1, 1\} \\ y_1 & = & \dfrac{5+x_2}{2} \\ y_2 & = & \dfrac{5-x_2}{2} \end{array}$$

Insgesamt also $\vec{v} \in \{(-2,-1,2,3), (2,1,3,2)\}$. Wegen $F(-2,-1,2,3) = (-2-2)^2 + (-1-3)^2 = 32$ und $F(2,1,3,2) = (2-3)^2 + (1-2)^2 = 2$ ist $\vec{v} = (2,1,3,2)$ und $d(A,B) = \sqrt{F(\vec{v})} = \sqrt{2}$.
$\square$

Aufgabe 69:

Sei $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$G(x,y,z) = \begin{pmatrix} x+y+z \\ x^2+y^2+z^2-1 \end{pmatrix}$$

für alle $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Klar: $G \in C^1(\mathbb{R}^3)$. Dann ist $S = G^{-1}\left(\left\{\vec{0}\right\}\right)$. Da G stetig ist und $\left\{\vec{0}\right\}$ abgeschlossen, ist S abgeschlossen. Wegen $\|(x,y,z)\| = 1$ für jedes $(x,y,z) \in S$, ist S beschränkt. Nach der Vorlesung ist also S kompakt. Ebenfalls nach der Vorlesung, existieren ein $\vec{v_1}, \vec{v_2} \in S$ mit

$$f(\vec{v_1}) \leq f(\vec{v}) \leq f(\vec{v_2})$$

für alle $\vec{v} \in S$. Damit ist die Existenz der globalen Extrema von f auf S gesichert.

Da jede Stelle eines globalen Extremums auch eine Stelle eines lokalen Extremums ist, bietet es sich an diese mit Hilfe der Multiplikatorenregel von Lagrange zu identifizieren: Es ist

$$G'(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x & 2y & 2z \end{pmatrix}$$

für alle $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Also kann $G'(x,y,z)$ nur für $x = y = z$ nicht den vollen Rang haben. Aber für jedes $(x,y,z) \in S$ gilt $x = y = z \Rightarrow x = y = z = 0$, was ein Widerspruch zu $\|(x,y,z)\| = 1$ darstellt. Also hat G' auf S den vollen Rang 2. Es existiert $\vec{\lambda} \in \mathbb{R}^2$ mit

$$f'(\vec{v_i}) = \vec{\lambda}^T G'(\vec{v_i})$$

für $i \in \{1,2\}$. Zusammen mit der Nebenbedingung $G(\vec{v_i}) = 0$, ergibt es die folgenden fünf Gleichungen:

$$\begin{array}{rcll} 5 & = & \lambda_1 + 2x\lambda_2 & (8) \\ 1 & = & \lambda_1 + 2y\lambda_2 & (9) \\ -3 & = & \lambda_1 + 2z\lambda_2 & (10) \\ 0 & = & x+y+z & (11) \\ 1 & = & x^2+y^2+z^2 & (12) \end{array}$$

Addition von (8), (9) und (10), sowie Ausnutzung von (11) liefert $3 = 3\lambda_1$, also

$$\lambda_1 = 1. \tag{13}$$

Einsetzen in (8) impliziert $2 = x\lambda_2$, also $\lambda_2 \neq 0$. Einsetzen von (13) in (9) liefert

$$y = 0. \tag{14}$$

Mit (11) folgt dann sofort

$$z = -x. \tag{15}$$

Durch (12) folgt

$$x \in \left\{ -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}. \tag{16}$$

Es ist also

$$\vec{v}_i \in \left\{ \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2} \right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right\}$$

für $i \in \{1, 2\}$. Es ist $f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -4\sqrt{2}$ und $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 4\sqrt{2}$, also

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2} \right), \\ \vec{v}_2 &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right). \end{aligned}$$

Auf 70)

a) $g(t) = \exp(c \cdot t)$ $\quad c = \langle x, y \rangle$

$g'(t) = c \exp(c \cdot t)$

$g''(t) = c^2 \exp(c \cdot t)$

$\vdots$

$g^{(s)}(t) = c^s \exp(c \cdot t)$

b) $D k(tx)[x] = \nabla k(tx)\, x$

$D^s k(tx)[x, \dots, x] = \sum_{j_1, \dots, j_s = 1}^{n} [\partial_{j_1} \dots \partial_{j_s} k(tx)]\, x_{j_1} \dots x_{j_s} = \sum_{|\alpha| = s} \frac{s!}{\alpha!} \partial^\alpha k(tx)\, x^\alpha$

$\partial^\alpha k(tx) = \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_n^{\alpha_n} \exp\left(\sum_{j=1}^{n} tx_j y_j\right) = y_1^{\alpha_1} \dots y_n^{\alpha_n} \exp\left(\sum tx_j y_j\right) = y^\alpha \exp\left(\sum_{j=1}^{n} tx_j y_j\right)$

c) $D k(tx)[x] = \langle y, x \rangle k(tx)$

$D^2 k(tx)[x, x] = \langle y, x \rangle D k(tx)[x] = \langle y, x \rangle^2 k(tx)$

$\vdots$

$D^s k(tx)[x, \dots, x] = \langle y, x \rangle^s k(tx) = \langle y, x \rangle^s \exp(c \cdot t)$

$g^{(s)}(t) = c^s \exp(ct) = D^s k(tx)[x, \dots x]$

d) $x = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad t = 1$

$(y_1 \cancel{x_1} + \dots + \cancel{x_n} y_n)^s \exp(ct) = \sum_{|\alpha| = s} \frac{s!}{\alpha!} y^\alpha \exp(ct)\, x^\alpha$

$(y_1 + \dots + y_n)^s = \sum_{|\alpha| = s} \frac{s!}{\alpha!} y^\alpha$