Karlsruher Institut für Technologie

**Institut für Analysis**
Prof. Dr. Dirk Hundertmark
Dr. Michal Jex

SS2017/18
9.7.2018

# Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

## 12. Übungsblatt

**Aufgabe 71:**

(a) Sei $g : \underbrace{\mathbb{R}^m \times \ldots \times \mathbb{R}^m}_{\text{k-mal}} \to \mathbb{R}$ eine $k$-linear Funktion und sei $a_j : (a,b) \to \mathbb{R}^m$, $j = 1, \ldots, k$, $a, b \in \mathbb{R}$ differenzbar. Berechnen Sie
$$\frac{d}{dt} g(a_1(t), \ldots, a_k(t)) \,.$$

(b) Sei $A : (a,b) \to \mathbb{R}^{m\times m}$, $B(t) = (b_1(t), \ldots, b_m(t))$ eine Matrix wobei $b_j(t) \in C^1((a,b), \mathbb{R}^m)$, $j = 1, \ldots, m$, $a, b \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie
$$\frac{d}{dt} \det(B(t)) \,.$$

*Hinweis*: Die Determinante ist eine multilineare Funktion.

**Aufgabe 72:**
Berechnen Sie jeweils das Kurvenintegral
$$\int_\gamma f(x) \cdot \mathrm{d}s.$$

(a) $f(x) = (e^{xy}, xy)$, $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$,

(b) $f(x) = (2xy, x^2 + y^2)$, $\gamma : \left[0, \frac{19}{4}\pi\right] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = \frac{4\sqrt{2}t}{19\pi} \begin{pmatrix} \cos(t) \\ 2\sin(t) \end{pmatrix}$,

(c) $f(x) = e^{-xz}(2x - x^2 z - 5zy^3, 15y^2, -x^3 - 5xy^3)$, $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (t^3, t^2 - t, \sin(\pi t))$,

(d) $f(x) = (y, -z, x)$, $\gamma : [0, \log(2)] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (\sinh(t), \cosh(t), \sinh(t))$.

**Aufgabe 73:**
Es sei $0 < r < R$. Berechnen Sie die Oberfläche des Rotationstoruses
$$\mathbb{T}_r^R = \{((R + r\cos(\vartheta))\cos(\varphi), (R + r\cos(\vartheta))\sin(\varphi), r\sin(\vartheta)) : \varphi, \vartheta \in [0, 2\pi)\} \,.$$

**Aufgabe 74:**
Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\int_A \frac{y}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \mathrm{d}xy$, $A = [0,1]^2$,

(b) $\int_A \frac{1}{(x+y)^2} \mathrm{d}xy$, $A = [1,2] \times [3,4]$,

(c) $\int_B x^2 yz \mathrm{d}xyz$, $B = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le y \le x,\ x^2 + y^2 \le 1,\ 0 \le z \le 2\right\}$,

(d) $\int_B y^2 \mathrm{d}xyz$, $B = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 \le y^2 + z^2 \le |x|\right\}$.

**— Bitte wenden! —**

**Aufgabe 75:**
Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische, positiv definite Matrix. Betrachten Sie die Funktionenfamilie $(\varphi_\sigma)_{\sigma>0}$, welche durch

$$\varphi_\sigma(x) = \sqrt{\frac{\det(A)}{(2\pi\sigma)^n}} \cdot e^{-\frac{x^T A x}{2\sigma}}$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und alle $\sigma > 0$, definiert ist.

(a) Zeigen Sie, dass für alle $\sigma > 0$

$$\varphi_\sigma \in L^1(\mathbb{R}^n) \quad \text{und} \quad \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\sigma(x)\mathrm{d}x = 1.$$

(b) Zeigen Sie, dass für jedes $\delta > 0$

$$\lim_{\sigma\to 0+} \int_{\mathbb{R}^n\setminus B_0(\delta)} \varphi_\sigma(x)\mathrm{d}x = 0$$

gilt.

(c) Zeigen Sie, dass

$$\lim_{\sigma\to 0+} \varphi_\sigma(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \neq 0, \\ \infty & \text{für } x = 0 \end{cases}.$$

*Hinweis:* Machen Sie erst den Fall $A = \mathbb{I}_n$ (Identität auf $\mathbb{R}^n$).

**Hinweis:** In der großen Saalübung werden voraussichtlich die Aufgaben 71, 73 und 75 besprochen. Die restlichen Aufgaben werden in den Tutorien behandelt.