Auf 71)

a) $y = x + h$

$$g(y) = g(x) + \sum_{l=1}^{k} g(x_1 \dots x_{l-1}, h_l, y_{l+1} \dots y_k)$$

$$g(x_1 \dots x_{l-1}, h_l, y_{l+1} \dots y_k) = g(x_1 \dots x_{l-1}, h_l, x_{l+1} \dots x_k) + \sum_{j=1}^{k-l} g(x_1 \dots x_{l-1}, h_l, x_{l+1} \dots x_{j-1}, h_j, y_{j+1} \dots y_k)$$

$$g(y) - g(x) = A_x(h) + r(x,h)$$

$$A_x h : (h_1 \dots h_k) \to \sum_{j=1}^{k} g(x_1 \dots x_{j-1}, h_j, x_{j+1} \dots x_k)$$

$$r(x,h) = \sum_{l=1}^{k} \sum_{j=1}^{k-l} g(x_1 \dots x_{l-1}, h_l, x_{l+1} \dots x_{j-1}, h_j, y_{j+1} \dots y_k)$$

$$r(x,h) = o(\|h\|)$$

$$\|r(x,h)\| \leq \|g\| \, \|x_1\| \dots \|x_{k-1}\| \, \|h_k\| \, \|x_{k+1}\| \dots \|x_{j-1}\| \, \|h_j\| \, \|y_{j+1}\| \dots \|y_m\| \leq C \|h\|^2$$

$$\Rightarrow A_x h = Dg[h]$$

$$\frac{d}{dt} g(a_1(t), \dots, a_m(t)) \overset{\text{Kettenregel}}{=} \sum_{j=1}^{m} g(a_1(t), \dots, a_{j-1}(t), a_j'(t), a_{j+1}(t) \dots a_m(t))$$

b) $$\frac{d}{dt} \det(B(t)) = \sum_{j=1}^{m} \det(b_1(t), \dots b_{j-1}(t), b_j'(t), b_{j+1}(t), \dots b_m(t))$$

Aufgabe 72:

(a) Es gilt nach Definition des Kurvenintegrals:

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(\vec{x})\cdot \mathrm{d}\vec{s} &= \int_0^{2\pi} f(\gamma(t))\cdot\dot\gamma(t)\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi}(e^{\cos(t)\sin(t)},\cos(t)\sin(t))\cdot(-\sin(t),\cos(t))\mathrm{d}t\\
&= \int_0^{2\pi}\cos^2(t)\sin(t)-\sin(t)e^{\cos(t)\sin(t)}\mathrm{d}t\\
&= \left[-\frac{1}{3}\cos^3(t)\right]_{t=0}^{t=2\pi} - \int_0^{\pi}\sin(t)e^{\cos(t)\sin(t)}\mathrm{d}t - \int_\pi^{2\pi}\sin(t)e^{\cos(t)\sin(t)}\mathrm{d}t\\
&\overset{t=\tau+\pi}{=} \left[-\frac{1}{3}\cos^3(t)\right]_{t=0}^{t=2\pi} - \int_0^{\pi}\sin(t)e^{\cos(t)\sin(t)}\mathrm{d}t + \int_0^{\pi}\sin(\tau)e^{\cos(\tau)\sin(\tau)}\mathrm{d}\tau = 0
\end{aligned}$$

(b) Es gilt

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = 2x = \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y)$$

für alle $x,y\in\mathbb{R}$. Da $\mathbb{R}^2$ einfach zusammenhängend und f ein C^1-Vektorfeld ist, gilt nach der Vorlesung, dass f ein Potentialfeld ist. Also hängt der Wert des Integrals nicht von dem konkreten Weg, sondern nur von den Randpunkten ab. Es ist

$$\gamma(0) = (0,0), \quad \gamma\left(\frac{19}{4}\pi\right) = (-1,2).$$

Wähle also $\tilde\gamma : [0,1]\to\mathbb{R}^2$ mit $\tilde\gamma(t) = t(-1,2)$. Es gilt:

$$\int_\gamma f(\vec{x})\cdot\mathrm{d}\vec{s} = \int_{\tilde\gamma} f(\vec{x})\cdot\mathrm{d}\vec{s} = \int_0^1 f(\tilde\gamma(t))\cdot\dot{\tilde\gamma}(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 4t^2+10t^2\mathrm{d}t = 14\int_0^1 t^2\mathrm{d}t = \frac{8}{3}[t^3]_{t=0}^{t=1} = \frac{14}{3}$$

(c) Es gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y,z) &= -15y^2ze^{-xz} = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y,z)\\
\frac{\partial f_1}{\partial z}(x,y,z) &= (-3x^2-5y^3+x^3z+5xy^3z)e^{-xz} = \frac{\partial f_3}{\partial x}(x,y,z)\\
\frac{\partial f_2}{\partial z}(x,y,z) &= -15xy^2 = \frac{\partial f_3}{\partial y}(x,y,z)
\end{aligned}$$

für alle $x,y,z\in\mathbb{R}$. Da $\mathbb{R}^3$ einfach zusammenhängend und f ein C^1-Vektorfeld ist, gilt nach der Vorlesung, dass f ein Potentialfeld ist. Also hängt der Wert des Integrals nicht von dem konkreten Weg, sondern nur von den Randpunkten ab. Es ist

$$\gamma(0) = (0,0,0), \quad \gamma(1) = (1,0,0).$$

Wähle also $\tilde\gamma : [0,1]\to\mathbb{R}^3$ mit $\tilde\gamma(t) = (t,0,0)$. Es gilt:

$$\int_\gamma f(\vec{x})\cdot\mathrm{d}\vec{s} = \int_{\tilde\gamma} f(\vec{x})\cdot\mathrm{d}\vec{s} = \int_0^1 f(\tilde\gamma(t))\cdot\dot{\tilde\gamma}(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 2t\mathrm{d}t = \left[t^2\right]_{t=0}^{t=1} = 1$$

(d) Es gilt nach Definition des Kurvenintegrals:

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(\vec{x})\cdot\mathrm{d}\vec{s} &= \int_0^{\log(2)} f(\gamma(t))\cdot\dot\gamma(t)\mathrm{d}t\\
&= \int_0^{\log(2)}(\cosh(t),-\sinh(t),\sinh(t))\cdot(\cosh(t),\sinh(t),\cosh(t))\mathrm{d}t\\
&= \int_0^{\log(2)}\cosh^2(t)-\sinh^2(t)+\sinh(t)\cosh(t)\mathrm{d}t\\
&= \int_0^{\log(2)}1+\sinh(t)\cosh(t)\mathrm{d}t = \log(2)+\frac{1}{2}\left[\sinh^2(t)\right]_{t=0}^{t=\log(2)} = \log(2)+\frac{9}{32}
\end{aligned}$$

Aufgabe 73:
Betrachte die Abbildung $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$F(\varphi, \vartheta) = ((R + r\cos(\vartheta))\cos(\varphi), (R + r\cos(\vartheta))\sin(\varphi), r\sin(\vartheta))$$

für alle $\varphi, \vartheta \in \mathbb{R}$. Wir zeigen: F ist injektiv auf $[0, 2\pi)^2$: Seien dazu $\varphi_1, \varphi_2 \in [0, 2\pi)$ und $\vartheta_1, \vartheta_2 \in [0, 2\pi)$ mit $F(\varphi_1, \vartheta_1) = F(\varphi_2, \vartheta_2)$. Insbesondere ist

$$\begin{aligned}
\mathbb{R}^2 \ni (F_1(\varphi_1, \vartheta_1), F_2(\varphi_1, \vartheta_1)) &= \underbrace{(R + r\cos(\vartheta_1))}_{>0}(\cos(\varphi_1), \sin(\varphi_1)) \\
&= \underbrace{(R + r\cos(\vartheta_2))}_{>0}(\cos(\varphi_2), \sin(\varphi_2)) = (F_1(\varphi_2, \vartheta_2), F_2(\varphi_2, \vartheta_2) \in \mathbb{R}^2
\end{aligned}$$

Wegen der Bijektivität der Polarkoordinaten auf $\mathbb{R}^2 \setminus \left\{\vec{0}\right\}$ gilt $\varphi_1 = \varphi_2$ und $(R + r\cos(\vartheta_2)) = (R + r\cos(\vartheta_2))$. Mit $F_3(\varphi_1, \vartheta_1) = F_3(\varphi_2, \vartheta_2)$, folgt weiter

$$\begin{aligned}
r\cos(\vartheta_1) &= r\cos(\vartheta_2), \\
r\sin(\vartheta_1) &= r\sin(\vartheta_2).
\end{aligned}$$

Wieder folgt mit der Bijektivitat der Polarkoordinaten auf $\mathbb{R}^2 \setminus \left\{\vec{0}\right\}$, dass $\vartheta_1 = \vartheta_2$ gilt. Damit hat sich F als injektiv auf $[0, 2\pi)^2$ erwiesen.

Es gilt

$$F'(\varphi, \vartheta) = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi)(R + r\cos(\vartheta)) & -r\sin(\vartheta)\cos(\varphi) \\ \cos(\varphi)(R + r\cos(\vartheta)) & -r\sin(\vartheta)\sin(\varphi) \\ 0 & r\cos(\vartheta) \end{pmatrix}$$

für alle $\varphi, \vartheta \in \mathbb{R}$. Insbesondere ist

$$\sqrt{\det\left(F'(\varphi, \vartheta)^T \cdot F'(\varphi, \vartheta)\right)} = \sqrt{\begin{vmatrix} (R + r\cos(\vartheta))^2 & 0 \\ 0 & r^2 \end{vmatrix}} = r(R + r\cos(\vartheta)) > 0$$

für alle $\varphi, \vartheta \in \mathbb{R}$ und damit ist $\operatorname{rg}(T'(\varphi, \vartheta)) = 2$ für alle $\varphi, \vartheta \in \mathbb{R}$. Definiere $U = (0, 2\pi)^2$, sowie $N_1 = \{F(\varphi, 0) : \varphi \in (0, 2\pi)\}$, $N_2 = \{F(0, \vartheta) : \vartheta \in (0, 2\pi)\}$ und $N_3 = \{F(0, 0)\}$. Es ist $N_1 \subseteq F((0, 2\pi) \times (-\pi, \pi))$, $N_2 \subseteq F((-\pi, \pi) \times (0, 2\pi))$ und $N_3 \subseteq F((-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi))$. Damit gilt nach der Vorlesung:

$$\begin{aligned}
o(N_1) &= \int_{(0,2\pi)\times\{0\}} 1 \cdot \sqrt{\det(F'(\varphi, \vartheta)^T F'(\varphi, \vartheta))}\mathrm{d}(\varphi, \vartheta) = 0 \\
o(N_2) &= \int_{\{0\}\times(0,2\pi)} 1 \cdot \sqrt{\det(F'(\varphi, \vartheta)^T F'(\varphi, \vartheta))}\mathrm{d}(\varphi, \vartheta) = 0 \\
o(N_3) &= \int_{\{0\}\times\{0\}} 1 \cdot \sqrt{\det(F'(\varphi, \vartheta)^T F'(\varphi, \vartheta))}\mathrm{d}(\varphi, \vartheta) = 0
\end{aligned}$$

Also ist $N = N_1 \cup N_2 \cup N_3$ eine o-Nullmenge. Es ist ferner $\mathbb{T}_r^R = F(U) \cup N$. Wieder nach der Vorlesung gilt:

$$\begin{aligned}
o(\mathbb{T}_r^R) &= \int_{F(U)} \mathrm{d}a = \int_U \sqrt{\det(F'(\varphi, \vartheta)^T F'(\varphi, \vartheta))}\mathrm{d}(\varphi, \vartheta) = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} r(R + \cos(\vartheta))\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}\varphi \\
&= 2\pi r \int_0^{2\pi} (R + \cos(\vartheta))\mathrm{d}\vartheta = 4\pi^2 rR
\end{aligned}$$

Aufgabe 74:

(a) Es gilt nach dem Satz von Fubini:

$$\begin{aligned}
\int_A \frac{y}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}(x,y) &= \int_0^1\int_0^1 \frac{y}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}y\mathrm{d}x = -\int_0^1 \left[\frac{1}{(1+x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}\right]_{y=0}^{y=1}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{1}{(2+x^2)^{\frac{1}{2}}}\mathrm{d}x \\
&= [\operatorname{Arsinh}(x)]_{x=0}^{x=1} - \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^1 \frac{1}{\left(1+\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}}\mathrm{d}x \\
&\overset{y=\frac{x}{\sqrt{2}}}{=} \operatorname{Arsinh}(1) - \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{(1+y^2)^{\frac{1}{2}}}\mathrm{d}y = \operatorname{Arsinh}(1) - [\operatorname{Arsinh}(y)]_{y=0}^{y=\frac{\sqrt{2}}{2}} = \\
&= \operatorname{Arsinh}(1) - \operatorname{Arsinh}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \log\left(1+\sqrt{2}\right) - \log\left(\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right) \\
&= \log\left(\frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}\right)
\end{aligned}$$

(b) Es gilt nach dem Satz von Fubini:

$$\begin{aligned}
\int_A \frac{1}{(x+y)^2}\mathrm{d}(x,y) &= \int_1^2\int_3^4 \frac{1}{(x+y)^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}x = -\int_1^2 \left[\frac{1}{x+y}\right]_{y=3}^{y=4}\mathrm{d}x = \int_1^2 \frac{1}{x+3}\mathrm{d}x - \int_1^2 \frac{1}{x+4}\mathrm{d}x \\
&= [\log(x+3)]_{x=1}^{x=2} - [\log(x+4)]_{x=1}^{x=2} = \log\left(\frac{5}{4}\right) - \log\left(\frac{6}{5}\right) = \log\left(\frac{25}{24}\right)
\end{aligned}$$

(c) Es gilt nach dem Satz von Fubini

$$\int_B x^2yz\mathrm{d}(x,y,z) = \int_0^2 z\int_{B'} x^2y\mathrm{d}(x,y)\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\left[z^2\right]_{z=0}^{z=2}\int_{B'} x^2y\mathrm{d}(x,y) = 2\int_{B'} x^2y\mathrm{d}(x,y)$$

mit

$$B' = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le y\le x,\ x^2+y^2\le 1\right\}.$$

Einführen von Polarkoordinaten für x, y liefert:

$$\begin{aligned}
\int_{B'} x^2y\mathrm{d}(x,y) &= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^1 \rho^2\cos^2(\varphi)\rho\sin(\varphi)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi = \int_0^1 \rho^4\mathrm{d}\rho\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2(\varphi)\sin(\varphi)\mathrm{d}\varphi \\
&= \frac{1}{5}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\left[\cos^3(\varphi)\right]_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{15}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)
\end{aligned}$$

Insgesamt also:

$$\int_B x^2yz\mathrm{d}(x,y,z) = \frac{2}{15}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$$

(d) Für alle $x\in\mathbb{R}$ gilt $x^2\le|x| \Leftrightarrow |x|\le 1$. Deshalb folgt mit dem Satz von Fubini:

$$\int_B y^2\mathrm{d}(x,y,z) = \int_{-1}^1\int_{B_x} y^2\mathrm{d}(y,z)\mathrm{d}x$$

mit

$$B_x = \left\{(y,z)\in\mathbb{R}^2 : x^2\le y^2+z^2\le|x|\right\}.$$

Einführen von Polarkoordinaten für y, z liefert

$$\int_{B_x} y^2 \mathrm{d}(y,z) = \int_0^{2\pi} \int_{|x|}^{\sqrt{|x|}} \rho^2 \cos^2(\varphi) \rho \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\varphi = \pi \frac{1}{4} \left[\rho^4\right]_{\rho=|x|}^{\rho=\sqrt{|x|}} = \frac{\pi}{4} \left(x^2 - x^4\right)$$

für alle $x \in [-1, 1]$. Da nun im Integranden nur gerade Potenzen von x vorkommen, folgt:

$$\int_B y^2 \mathrm{d}(x,y,z) = 2 \int_0^1 \frac{\pi}{4} \left(x^2 - x^4\right) \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \int_0^1 \left(x^2 - x^4\right) \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{\pi}{15}$$

Aufgabe 75:

Da die Matrix A symmetrisch und reell ist, existiert nach Satz aus der Vorlesung eine orthogonale Matrix $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und eine Diagonalmatrix

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

mit $A = SDS^T$. Dabei ist $\operatorname{spec}(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$. Da A positiv definit ist, gilt nach der Vorlesung, $\lambda_i > 0$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$. Definiere

$$D' = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & 0 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & \sqrt{\lambda_{n-1}} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

und $W = SD'S^T$. Es ist $W^2 = SD'S^T SD'S^T = A$, $W^T = (S^T)^T (D')^T S^T = W$. Folglich ist

$$\vec{x}^T A \vec{x} = \vec{x}^T W^2 \vec{x} = (W^T \vec{x})^T \cdot (W\vec{x}) = (W\vec{x})^T \cdot (W\vec{x}) = \|W\vec{x}\|^2 \tag{1}$$

(a) Sei $\sigma > 0$ fest. Da $\varphi_\sigma(\vec{x}) > 0$ für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ ist, reicht es aus $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\sigma(\vec{x}) \mathrm{d}\vec{x} = 1$ nachzurechnen. Betrachte dazu die lineare Abbildung $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit $T(\vec{x}) := \sqrt{2\sigma} W^{-1} \vec{x}$ für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Es ist $T'(\vec{x}) = \sqrt{2\sigma} W^{-1}$ bzw. $\det(T'(\vec{x})) = \frac{(\sqrt{2\sigma})^n}{\det(W)} = \frac{(\sqrt{2\sigma})^n}{\sqrt{\det(A)}} > 0$ für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Nach dem Transformationssatz der Vorlesung gilt

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\sigma(\vec{x}) \mathrm{d}\vec{x} &= \sqrt{\frac{\det(A)}{(2\pi\sigma)^n}} \cdot \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\left\|\frac{1}{\sqrt{2\sigma}} W\vec{x}\right\|^2} \mathrm{d}\vec{x} = \sqrt{\frac{\det(A)}{(2\pi\sigma)^n}} \cdot \int_{T(\mathbb{R}^n)} e^{-\left\|T^{-1}(\vec{x})\right\|^2} \mathrm{d}\vec{x} \\ &= \sqrt{\frac{\det(A)}{(2\pi\sigma)^n}} \cdot \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|y\|^2} \left|\det(T'(\vec{y}))\right| \mathrm{d}\vec{y} = \pi^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|y\|^2} \mathrm{d}\vec{y} \\ &\overset{\text{Fubini}}{=} \pi^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} e^{-\sum_{j=1}^n |y_j|^2} \mathrm{d}y_1 \cdots \mathrm{d}y_n = \pi^{\frac{n}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|y_1|^2} \mathrm{d}y_1 \cdots \int_{\mathbb{R}} e^{-|y_n|^2} \mathrm{d}y_n \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \mathrm{d}x}_{=\sqrt{\pi}} \right)^n = 1. \end{aligned}$$

(b) Es gilt für alle $\sigma > 0$:

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus K(\vec{0},\delta)} \varphi_\sigma(\vec{x})\mathrm{d}\vec{x} = \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\sigma(\vec{x})\mathrm{d}\vec{x}}_{=1, \text{ nach (a)}} - \int_{K(\vec{0},\delta)} \varphi_\sigma(\vec{x})\mathrm{d}\vec{x}$$

Also reicht es aus, $\lim_{\sigma\to 0+} \int_{K(\vec{0},\delta)} \varphi_\sigma(\vec{x})\mathrm{d}\vec{x} = 1$ zu zeigen. Sei $\sigma > 0$ zunächst fest. Betrachte die Abbildung $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definiert durch $T(\vec{x}) = \sqrt{\sigma}\vec{x}$ für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Es ist dann $T'(\vec{x}) = \sqrt{\sigma} I_n$ bzw. $\det(T'(\vec{x})) = (\sqrt{\sigma})^n > 0$ für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Des Weiteren ist $T(K(\vec{0}, \frac{\delta}{\sqrt{\sigma}})) = K(\vec{0}, \delta)$. Nach dem Transformationssatz der Vorlesung gilt:

$$\begin{aligned}\int_{K(\vec{0},\delta)} \varphi_\sigma(\vec{x})\mathrm{d}\vec{x} &= \sqrt{\frac{\det(A)}{(2\pi\sigma)^n}} \cdot \int_{T(K(\vec{0},\frac{\delta}{\sqrt{\sigma}}))} e^{-\frac{\vec{x}^T A\vec{x}}{2\sigma}}\mathrm{d}\vec{x} = \sqrt{\frac{\det(A)}{(2\pi)^n}} \cdot \int_{K(\vec{0},\frac{\delta}{\sqrt{\sigma}})} e^{-\frac{\vec{y}^T A\vec{y}}{2}}\mathrm{d}\vec{y} \\ &= \int_{K(\vec{0},\frac{\delta}{\sqrt{\sigma}})} \varphi_1(\vec{y})\mathrm{d}\vec{y} = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{I}_{K(\vec{0},\frac{\delta}{\sqrt{\sigma}})}(\vec{y})\varphi_1(\vec{y})\mathrm{d}\vec{y}\end{aligned}$$

Es gilt ferner für alle $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$

$$\lim_{\sigma\to 0+} \mathbb{I}_{K(\vec{0},\frac{\delta}{\sqrt{\sigma}})}(\vec{y}) = 1,$$

sowie

$$0 \le \mathbb{I}_{K(\vec{0},\frac{\delta}{\sqrt{\sigma}})}(\vec{y})\varphi_1(\vec{y}) \le \varphi_1(\vec{y}).$$

Nach Teilaufgabe (a), ist $\varphi_1 \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Damit folgt mit dem Satz über dominierte Konvergenz aus der Vorlesung:

$$\begin{aligned}\lim_{\sigma\to 0+} \int_{K(\vec{0},\delta)} \varphi_\sigma(\vec{x})\mathrm{d}\vec{x} &= \lim_{\sigma\to 0+} \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{I}_{K(\vec{0},\frac{\delta}{\sqrt{\sigma}})}(\vec{y})\varphi_1(\vec{y})\mathrm{d}\vec{y} = \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{\sigma\to 0+} \mathbb{I}_{K(\vec{0},\frac{\delta}{\sqrt{\sigma}})}(\vec{y})\varphi_1(\vec{y})\mathrm{d}\vec{y} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_1(\vec{y})\mathrm{d}\vec{y} = 1\end{aligned}$$

(c) Für $\vec{x} = \vec{0}$ gilt

$$\varphi_\sigma(\vec{x}) = \sqrt{\frac{\det(A)}{(2\pi\sigma)^n}} \cdot e^{-\frac{\vec{x}^T A\vec{x}}{2\sigma}} = \underbrace{\sqrt{\frac{\det(A)}{(2\pi)^n}}}_{>0} \cdot \sigma^{-\frac{n}{2}} \to \infty$$

für $\sigma \to 0+$.

Für $\vec{x} \neq \vec{0}$ hingegen ist

$$\begin{aligned}0 \quad &\le \quad \lim_{\sigma\to 0+} \varphi_\sigma(\vec{x}) = \lim_{\sigma\to 0+} \sqrt{\frac{\det(A)}{(2\pi\sigma)^n}} \cdot e^{-\frac{\vec{x}^T A\vec{x}}{2\sigma}} = \sqrt{\frac{\det(A)}{(2\pi)^n}} \cdot \lim_{\nu\to\infty} \frac{\nu^{\frac{n}{2}}}{e^{\nu\frac{\vec{x}^T A\vec{x}}{2}}} \\ &\le \quad \sqrt{\frac{\det(A)}{(2\pi)^n}} \cdot \lim_{\nu\to\infty} \frac{\overbrace{\nu^n}^{\to\infty}}{\underbrace{e^{\nu\frac{\vec{x}^T A\vec{x}}{2}}}_{\to\infty}} \overset{\text{l'Hospital}}{=} \sqrt{\frac{\det(A)}{(2\pi)^n}} \cdot \frac{n}{\frac{\vec{x}^T A\vec{x}}{2}} \lim_{\nu\to\infty} \frac{\overbrace{\nu^{n-1}}^{\to\infty}}{\underbrace{e^{\nu\frac{\vec{x}^T A\vec{x}}{2}}}_{\to\infty}} \\ &\overset{\text{l'Hospital}}{=} \quad \dots \overset{\text{l'Hospital}}{=} \sqrt{\frac{\det(A)}{(2\pi)^n}} \cdot \frac{2^n n!}{(\vec{x}^T A\vec{x})^n} \lim_{\nu\to\infty} \frac{1}{e^{\nu\frac{\vec{x}^T A\vec{x}}{2}}} = 0.\end{aligned}$$