Institut für Analysis
Prof. Dr. Dirk Hundertmark
Dr. Michal Jex

SS2017/18
20.7.2018

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 13. Übungsblatt

Aufgabe 76:

(a) Mit Hilfe der Zylinderkoordinaten ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\int_A (x^2+y^2)^2 e^{2(1-z)^7}\mathrm{d}(x,y,z) &= \int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^{1-z}\rho^4 e^{2(1-z)^7}\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z\\
&= 2\pi\int_0^1 e^{2(1-z)^7}\left[\frac{\rho^6}{6}\right]_{\rho=0}^{\rho=1-z}\mathrm{d}z = \frac{\pi}{3}\int_0^1 e^{2(1-z)^7}(1-z)^6\mathrm{d}z\\
&\overset{x=1-z}{=} \frac{\pi}{3}\int_0^1 e^{2x^7}x^6\mathrm{d}x = \frac{\pi}{3}\cdot\frac{1}{14}\cdot\left[e^{2x^7}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{\pi}{42}(e^2-1)
\end{aligned}$$

(b) Es gilt nach dem Satz von Fubini:

$$\begin{aligned}
\int_B \sin(z)\mathrm{d}(x,y,z) &= \int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{\frac{1-x-y}{2}}\sin(z)\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x = -\int_0^1\int_0^{1-x}\left[\cos(z)\right]_{z=0}^{z=\frac{1-x-y}{2}}\mathrm{d}y\mathrm{d}x\\
&= \int_0^1\int_0^{1-x} 1-\cos\left(\frac{1-x-y}{2}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_0^1 (1-x)+2\left[\sin\left(\frac{1-x-y}{2}\right)\right]_{y=0}^{y=1-x}\mathrm{d}x\\
&= \int_0^1 (1-x)-2\sin\left(\frac{1-x}{2}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}-4\left[\cos\left(\frac{1-x}{2}\right)\right]_{x=0}^{x=1} = -\frac{7}{2}+4\cos\left(\frac{1}{2}\right)
\end{aligned}$$

(c) Mit Hilfe der Zylinderkoordinaten ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\int_A xyz\mathrm{d}(x,y,z) &= \int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^1 \rho\cos(\varphi)\rho\sin(\varphi)z\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z = \int_0^1 z\mathrm{d}z\cdot\int_0^{2\pi}\cos(\varphi)\sin(\varphi)\mathrm{d}\varphi\cdot\int_0^1\rho^3\mathrm{d}\rho\\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\left[\sin^2(\varphi)\right]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}\cdot\frac{1}{4} = 0
\end{aligned}$$

(d) Mit Hilfe der Zylinderkoordinaten ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\int_B z(x^3+xy^2)\mathrm{d}(x,y,z) &= \int_{-\pi}^{\pi} z\int_1^2\rho^3\left(\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cos(\varphi)\mathrm{d}\varphi+\int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}\cos(\varphi)\mathrm{d}\varphi\right)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}z\\
&= 0\cdot\frac{7}{5}\cdot\left(\sqrt{2}-\sqrt{2}\right) = 0
\end{aligned}$$

Aufgabe 77:

(a) Es gilt nach dem Satz von Fubini:

$$\begin{aligned}
\int_0^1\int_y^1 e^{x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{x^2}\mathbb{I}_{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\,0\le y\le x\le 1\}}(x,y)\mathrm{d}(x,y) = \int_0^1\int_0^x e^{x^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_0^1 xe^{x^2}\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{2}\left[e^{x^2}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{e-1}{2}
\end{aligned}$$

(b) Es ist:

$$\begin{aligned}
B &:= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1,\, y \leq x \leq y^2+1\right\} \\
&= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : ((0 \leq x \leq 1) \vee (x > 1)) \wedge (0 \leq y \leq 1) \wedge (y \leq x \leq y^2+1)\right\} \\
&= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : ((0 \leq y \leq x \leq 1) \vee ((1 < x \leq 2) \wedge (\sqrt{x-1} < y \leq 1))\right\} \\
&= \underbrace{\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq x \leq 1\right\}}_{=B_1} \cup \underbrace{\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (1 < x \leq 2) \wedge (\sqrt{x-1} < y \leq 1)\right\}}_{=B_2}
\end{aligned}$$

Ferner ist $B_1 \cap B_2 = \emptyset$. Es folgt mit dem Satz von Fubini:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_y^{y^2+1} x^2 y \mathrm{d}x \mathrm{d}y &= \int_B x^2 y \mathrm{d}(x,y) = \int_{B_1} x^2 y \mathrm{d}(x,y) + \int_{B_2} x^2 y \mathrm{d}(x,y) \\
&= \int_0^1 \int_0^x x^2 y \mathrm{d}y \mathrm{d}x + \int_1^2 \int_{\sqrt{x-1}}^1 x^2 y \mathrm{d}y \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^4}{2} \mathrm{d}x + \int_1^2 x^2 \frac{1-(x-1)}{2} \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{10} + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{8}\right]_{x=1}^{x=2} = \frac{1}{10} + \frac{8}{3} + \frac{1}{8} - \frac{1}{3} - 2 = \frac{67}{120}
\end{aligned}$$

Aufgabe 78:

Wir machen eine Fallunterscheidung nach der Dimension n:

- $n = 2$: Mit Hilfe der Polarkoordinaten ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n \setminus K(\vec{0},R)} \|\vec{x}\|^\alpha \, \mathrm{d}\vec{x} &= \int_R^\infty \int_0^{2\pi} \rho^\alpha \rho \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}\rho = 2\pi \int_R^\infty \rho^{\alpha+1} \mathrm{d}\rho \\
&= \begin{cases} \frac{2\pi}{\alpha+2} \left[\rho^{\alpha+2}\right]_{\rho=R}^\infty & \text{für } \alpha \neq -2, \\ 2\pi \left[\log(\rho)\right]_{\rho=R}^\infty & \text{für } \alpha = -2 \end{cases} \\
&= \begin{cases} -\frac{2\pi}{\alpha+2} R^{\alpha+2} & \text{für } \alpha < -2, \\ \infty & \text{für } \alpha \geq -2 \end{cases}
\end{aligned}$$

- $n = 3$: Mit Hilfe der Kugelkoordinaten ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n \setminus K(\vec{0},R)} \|\vec{x}\|^\alpha \, \mathrm{d}\vec{x} &= \int_R^\infty \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \rho^\alpha \rho^2 \cos(\theta) \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}\rho = 4\pi \int_R^\infty \rho^{\alpha+2} \mathrm{d}\rho \\
&= \begin{cases} \frac{4\pi}{\alpha+3} \left[\rho^{\alpha+3}\right]_{\rho=R}^\infty & \text{für } \alpha \neq -3, \\ 4\pi \left[\log(\rho)\right]_{\rho=R}^\infty & \text{für } \alpha = -3 \end{cases} \\
&= \begin{cases} -\frac{4\pi}{\alpha+3} R^{\alpha+3} & \text{für } \alpha < -3, \\ \infty & \text{für } \alpha \geq -3 \end{cases}
\end{aligned}$$

Aufgabe 79:

(a) Seien $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$\gamma_1(t) = (0,t), \quad \gamma_2(t) = (1-t,t), \quad \gamma_3(t) = (0,1-t)$$

für alle $t \in [0,1]$. Dann ist $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ eine doppelpunktfreie Parameterisierung von

∂D. Dabei liegt D immer „links von γ". Es gilt nach Definition des Kurvenintegrals:

$$\begin{aligned}
\int_{\partial D} f \cdot \mathrm{d}\vec{s} &= \int_0^1 f(\gamma_1(t)) \cdot \dot{\gamma}_1(t)\mathrm{d}t + \int_0^1 f(\gamma_2(t)) \cdot \dot{\gamma}_2(t)\mathrm{d}t + \int_0^1 f(\gamma_3(t)) \cdot \dot{\gamma}_3(t)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 [(t^2)] + [-((1-t)^2 + (1-t)t) + ((1-t)^2 t - t^2)] + [(1-t)^2]\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 -(1-t)t + (1-t)^2 t\mathrm{d}t = \int_0^1 (1-t)t(1-t-1)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 t^3 - t^2\mathrm{d}t = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{12}
\end{aligned}$$

(b) Es gilt nach dem Gaußschen Integralsatz im $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}
\int_{\partial D} f \cdot \mathrm{d}\vec{s} &= \int_D \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y)\mathrm{d}(x,y) \overset{\text{Fubini}}{=} \int_0^1 \int_0^{1-x} 2xy - x\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 x(1-x)^2 - x(1-x)\mathrm{d}x = \int_0^1 x(1-x)(1-x-1)\mathrm{d}x = -\int_0^1 x^2(1-x)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 x^3 - x^2\mathrm{d}x = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{12}
\end{aligned}$$

Aufgabe 80:

(a) Da B invariant ist unter Vertauschungen von x, y und z gilt:

$$\int_B (xy + yz + zx)\mathrm{d}(x,y,z) = 3\int_B xy\mathrm{d}(x,y,z)$$

Mit Hilfe der Kugelkoordinaten ergibt sich:

$$\begin{aligned}
3\int_B xy\mathrm{d}(x,y,z) &= 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 r\cos(\varphi)\cos(\theta) r\sin(\varphi)\cos(\theta) r^2\cos(\theta)\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{3}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\varphi)\cos(\varphi)\cos^3(\theta)\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{3}{5}\left[\frac{1}{2}\sin^2(\varphi)\right]_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2(\theta))\cos(\theta)\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{3}{10}[\sin(\theta) - \frac{1}{3}\sin^3(\theta)]_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{5}
\end{aligned}$$

(b) Sei $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch $F(x,y,z) = (xyz, xyz, xyz)$ für alle $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Wir beobachten

$$\nabla \cdot F(x,y,z) = yz + xz + xy$$

für alle $x,y,z \in \mathbb{R}$. Ferner ist $\partial B = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$ mit

$$\begin{aligned}
A_1 &= \left\{(0,y,z) : y,z \geq 0,\ y^2 + z^2 \leq 1\right\}, \\
A_2 &= \left\{(x,0,z) : x,z \geq 0,\ x^2 + z^2 \leq 1\right\}, \\
A_3 &= \left\{(x,y,0) : x,y \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 1\right\}, \\
A_4 &= \left\{(x,y,z) : x,y,z > 0, x^2 + y^2 + z^2 = 1\right\}.
\end{aligned}$$

Da $F(x,y,z) = \vec{0}$ für jedes $(x,y,z) \in A_1 \cup A_2 \cup A_3$ ausfällt, gilt nach dem Gaußschen Integralsatz:

$$\begin{aligned}
\int_B (xy + yz + zx)\mathrm{d}(x,y,z) &= \int_B \nabla \cdot F(x,y,z)\mathrm{d}(x,y,z) = \int_{\partial B} F \cdot N(x,y,z)\mathrm{d}a \\
&= \int_{A_4} F \cdot N(x,y,z)\mathrm{d}a
\end{aligned}$$

Auf A_4 ist der äußere Normalenvektor durch

$$N(x,y,z) = (x,y,z)$$

für alle $(x,y,z) \in A_4$ gegeben. Da A_4 invariant unter Vertauschungen von x, y und z ist, gilt:

$$\int_{A_4} F \cdot N(x,y,z)\mathrm{da} = \int_{A_4} x^2yz + xy^2z + xyz^2\mathrm{da} = 3\int_{A_4} x^2yz\mathrm{da}$$

Es folgt mit Hilfe der sphärischen Koordinaten:

$$\begin{aligned} 3\int_{A_4} x^2yz\mathrm{da} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(\varphi)\cos^2(\theta)\sin(\varphi)\cos(\theta)\sin(\theta)\cos(\theta)\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta \\ &= 3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(\varphi)\sin(\varphi)\cos^4(\theta)\sin(\theta)\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta \\ &= \left[\cos^3(\varphi)\right]_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{5}\left[\cos^5(\theta)\right]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{5} \end{aligned}$$

Aufgabe 81:

(a) Durch Einführung von Polarkoordinaten folgt:

$$A(D) = \int_D 1\mathrm{d}\vec{x} = \int_\alpha^\beta \int_0^{r(\varphi)} 1\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)\mathrm{d}\varphi$$

□

(b) Es gilt nach dem Gaußschen Integralsatz:

$$V(G) = \int_G 1\mathrm{d}\vec{x} = \frac{1}{3}\int_G \underbrace{(\nabla\cdot\vec{x})}_{=3}\mathrm{d}\vec{x} \overset{\text{Gauß}}{=} \frac{1}{3}\int_{\partial G} \vec{x}\cdot\vec{n}(\vec{x})\mathrm{d}a(\vec{x})$$

□

Aufgabe 82:

(a) Eine positiv orientierte Parameterisierung $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$ von ∂Z ist durch

$$\gamma(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 1-\cos(\varphi)-\sin(\varphi)) \end{pmatrix}$$

für alle $\varphi \in [0,2\pi]$ gegeben. Entsprechend ist

$$\gamma'(\varphi) = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi)-\cos(\varphi)) \end{pmatrix}$$

für alle $\varphi \in [0,2\pi]$. Damit gilt für das gesuchte Integral:

$$\begin{aligned} \int_\gamma (-y^3, x^3, -z^3)\cdot\mathrm{d}\vec{s} &= \int_0^{2\pi} (-\sin^3(\varphi), \cos^3(\varphi), -(1-\cos(\varphi)-\sin(\varphi))^3)\cdot \\ &\quad (-\sin(\varphi), \cos(\varphi), \sin(\varphi)-\cos(\varphi))\mathrm{d}\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \sin^4(\varphi)+\cos^4(\varphi) - (\sin(\varphi)-\cos(\varphi))(1-\cos(\varphi)-\sin(\varphi))^3\mathrm{d}\varphi \\ &= 2\int_0^{2\pi}\sin^4(\varphi)\mathrm{d}\varphi - \frac{1}{4}\left[(1-\cos(\varphi)-\sin(\varphi))^4\right]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \\ &\overset{\text{vgl. A. 5}}{=} 2\left[\frac{3}{8}\varphi - \cos(\varphi)\left(\frac{\sin^3(\varphi)}{4}+\frac{3\sin(\varphi)}{8}\right)\right]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} = \frac{3}{2}\pi \end{aligned}$$

(b) Eine reguläre Parameterisierung $\Phi : (0,1) \times (0,2\pi) \to \mathbb{R}^3$ der Fläche $M = E \cap Z$ (bis auf die σ-Nullmenge $N = \{(x,y,z) \in M : x \geq 0, y = 0\}$) ist durch

$$\Phi(r,\varphi) = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \\ 1 - r(\cos(\varphi) + \sin(\varphi)) \end{pmatrix}$$

für alle $r \in (0,1)$ und alle $\varphi \in (0,2\pi)$ gegeben. Wir berechnen vorbereitend das vektorielle Oberflächenelement (vgl. Abschnitt 21.8 des Skriptes)

$$\begin{aligned} \vec{n}\mathrm{d}a((r,\varphi)) &= \left(\frac{\partial\Phi}{\partial r} \times \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\right)(r,\varphi)\mathrm{d}(r,\varphi) \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ -\cos(\varphi) - \sin(\varphi) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r\sin(\varphi) \\ r\cos(\varphi) \\ r(\sin(\varphi) - \cos(\varphi)) \end{pmatrix} \mathrm{d}(r,\varphi) \\ &= r\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{d}(r,\varphi) \end{aligned}$$

für alle $(r,\varphi) \in (0,1) \times (0,2\pi)$. Als letzte Vorbereitung berechnen wir

$$\nabla \times \begin{pmatrix} -y^3 \\ x^3 \\ -z^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3x^2 + 3y^2 \end{pmatrix}$$

für alle $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Es folgt mit dem Satz von Stokes:

$$\int_\gamma (-y^3, x^3, -z^3) \cdot \mathrm{d}\vec{s} \overset{\text{Stokes}}{=} \int_M \nabla \times \begin{pmatrix} -y^3 \\ x^3 \\ -z^3 \end{pmatrix} \cdot \vec{n}(\vec{x})\mathrm{d}a(\vec{x}) = 3\int_0^1 \int_0^{2\pi} r^3 \mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r = \frac{3}{2}\pi$$

Aufgabe 83:

(a) Eine reguläre Parameterisierung $\Phi : (0,2\pi) \times \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}^3$ (bis auf die σ-Nullmenge $N = \{(0,0,1)\}$) der Fläche M ist durch

$$\Phi(\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi)\cos(\theta) \\ \sin(\varphi)\cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}$$

für alle $\varphi \in (0,2\pi)$ und alle $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ gegeben. Wir berechnen vorbereitend das vektorielle Oberflächenelement

$$\begin{aligned} \vec{n}\mathrm{d}a((\varphi,\theta)) &= \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} \times \frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right)(\varphi,\theta)\mathrm{d}(\varphi,\theta) \\ &= \begin{pmatrix} -\sin(\varphi)\cos(\theta) \\ \cos(\varphi)\cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\cos(\varphi)\sin(\theta) \\ -\sin(\varphi)\sin(\theta) \\ \cos(\theta)) \end{pmatrix} \mathrm{d}(\varphi,\theta) \\ &= \cos(\theta)\Phi(\varphi,\theta)\mathrm{d}(\varphi,\theta) \end{aligned}$$

für alle $(\varphi,\theta) \in (0,2\pi) \times (0,\frac{\pi}{2})$. Es gilt mit der Definition des Oberflächenintegrals:

$$\begin{aligned} \int_M f(\vec{x}) \cdot \vec{n}(\vec{x})\mathrm{d}a(\vec{x}) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 1 \\ \cos(\varphi)\cos(\theta)\sin(\theta) \\ \cos(\varphi)\cos(\theta)\sin(\varphi)\cos(\theta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\varphi)\cos(\theta) \\ \sin(\varphi)\cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix} \cos(\theta)\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \cos^2(\theta)\cos(\varphi) + 2\cos(\varphi)\sin(\varphi)\cos^3(\theta)\sin(\theta)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(\theta)\left[-\sin(\varphi)\right]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} + \cos^3(\theta)\sin(\theta)\left[\sin^2(\varphi)\right]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \mathrm{d}\theta = 0 \end{aligned}$$

(b) Eine positiv orientierte Parameterisierung $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ des Randes ∂M von M ist durch

$$\gamma(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

für alle $\varphi \in [0, 2\pi]$ gegeben. Es gilt

$$\gamma(\varphi)' = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

für alle $\varphi \in [0, 2\pi]$. Ferner liefert die *„Technik des scharfen Hinsehens"*™, dass für $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch $F(x, y, z) = (\frac{xz^2}{2}, \frac{x^2y}{2}, y)$ für alle $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ die Gleichung

$$\nabla \times F = (1, xz, xy)$$

für alle $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ gilt. Es folgt mit dem Satz von Stokes:

$$\begin{aligned}
\int_M f(\vec{x}) \cdot \vec{n}(\vec{x}) \mathrm{d}a(\vec{x}) &= \int_M (\nabla \times F(\vec{x})) \cdot \vec{n}(\vec{x}) \mathrm{d}a(\vec{x}) \\
&\overset{\text{Stokes}}{=} \int_\gamma F(\vec{x}) \cdot \mathrm{d}\vec{s} \\
&= \int_0^{2\pi} \left(0, \frac{\cos^2(\varphi)\sin(\varphi)}{2}, \sin(\varphi)\right) \cdot (-\sin(\varphi), \cos(\varphi), 0) \mathrm{d}\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{\cos^3(\varphi)\sin(\varphi)}{2} \mathrm{d}\varphi \\
&= -\frac{1}{8}\left[\cos^4(\varphi)\right]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} = 0
\end{aligned}$$