

HÖHERE MATHEMATIK II FÜR DIE FACHRICHTUNG PHYSIK

1. ÜBUNGSBLATT

AUFGABE 1 (ÜBUNG)

Seien $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

a) Es gilt

$$\text{Bild}(A)^\perp = \text{Kern}(A^*).$$

Hinweis: Ist V ein Vektorraum mit Skalarprodukt, so ist für $M \subseteq V$ der Orthogonalraum von M gegeben durch $M^\perp = \{v \in V : v \perp w \ \forall w \in M\}$.

b) Gilt $(Ax|x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{K}^n$, so ist

$$\text{Bild}(A) \perp \text{Kern}(A).$$

Hinweis: Ist V ein Vektorraum mit Skalarprodukt, so sind $M, N \subseteq V$ orthogonal bzw. $M \perp N : \Leftrightarrow \forall x \in M, y \in N : x \perp y$.

AUFGABE 2 (TUTORIUM)

Sei V ein $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit Skalarprodukt $(\cdot|\cdot)$. Weiter seien Vektoren $v, w, u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_n \in V$ sowie Skalare $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{K}$ ($n, m \in \mathbb{N}$) gegeben. Zeigen Sie, dass

$$\left(\sum_{i=1}^m \alpha_i u_i \middle| \sum_{j=1}^n \beta_j v_j \right) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \alpha_i \overline{\beta_j} (u_i | v_j).$$

Sei $\{v_1, \dots, v_n\}$ nun eine Orthonormalbasis von V . Beweisen Sie die Formeln

a) $(v|w) = \sum_{i=1}^n (v|v_i) \overline{(w|v_i)}.$

b) $(v|v) = \sum_{i=1}^n |(v|v_i)|^2.$

AUFGABE 3 (ÜBUNG)

Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe. Zeigen Sie:

a) Das neutrale Element e ist eindeutig bestimmt.

b) Das zu $a \in G$ inverse Element a^{-1} ist eindeutig bestimmt.

c) Sind $a, b \in G$, so lassen sich die Gleichungen $ax = b$ bzw. $xa = b$ eindeutig durch $x = a^{-1}b$ bzw. $x = ba^{-1}$ lösen.

AUFGABE 4 (TUTORIUM)

Es sei

$$G := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Zeigen Sie, dass G versehen mit der Matrizenmultiplikation eine Gruppe ist.

AUFGABE 5 (ÜBUNG)

Es sei $V = P[-1, 1]$ der Vektorraum der reellen Polynomfunktionen auf $[-1, 1]$ und $p_m \in V$ definiert durch

$$p_m(x) = x^m$$

für alle $m \in \mathbb{N}_0$ und $x \in [-1, 1]$. Ferner sei die Abbildung $(\cdot | \cdot) : V^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$(p|q) = \int_{-1}^1 \frac{p(y)q(y)}{\sqrt{1-y^2}} dy$$

für alle $p, q \in V$. Zeigen Sie, dass durch $(\cdot | \cdot)$ ein Skalarprodukt auf V definiert ist und wenden Sie das Gram-Schmidt-Verfahren bezüglich $(\cdot | \cdot)$ auf $\{p_0, p_1, p_2\}$ an.

AUFGABE 6 (TUTORIUM)

Lösen Sie AUFGABE 5 mit dem (bekannten) Skalarprodukt $(p|q) = \int_{-1}^1 p(y)q(y) dy$.

Allgemeine Informationen

- Webseite zur Vorlesung: <http://www.math.kit.edu/iana3/lehre/hm2phys2019s/>.
- Sprechzeiten von Dr. Schmoeger: Dienstags, 10-11 Uhr (Raum 2.046, **Geb. 20.30**) oder nach Vereinbarung per E-Mail (christoph.schmoeger@kit.edu).
- Sprechzeiten von Sebastian Schwarz: Mittwochs, 13-14 Uhr (Raum 2.043, **Geb. 20.30**) oder nach Vereinbarung per E-Mail (sebastian.schwarz@kit.edu).

Übungsbetrieb

- **WICHTIG: Anmeldung** für die Tutorien bis zum **26.04.2019** um **20 Uhr** unter <https://www.redseat.de/kit-physik/>. Die Einteilung wird am Samstag, den 27.04.2019, per E-Mail verschickt.
- Übungsblätter erscheinen wöchentlich (donnerstags) auf obiger Webseite. Sie umfassen den Stoff der aktuellen Woche und werden zum Teil freitags in der Übung, zum Teil in den Tutorien der folgenden Woche besprochen.

Klausur

- Die **Modulprüfung HM I** findet am **06.09.2019** von **8 bis 10 Uhr** statt. Die **Modulprüfung HM II** soll am **30.08.2019** von **11 bis 13 Uhr** stattfinden (bisher war der 02.09.2019 angekündigt, dieser Termin überschneidet sich jedoch mit einem Pflichtpraktikum).