

HÖHERE MATHEMATIK II FÜR DIE FACHRICHTUNG PHYSIK

2. ÜBUNGSBLATT

AUFGABE 7 (ÜBUNG)

a) Berechnen Sie die reellen Fourier-Koeffizienten der Funktionen $f_1, f_2 : [-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$(i) f_1(t) = \begin{cases} \frac{1}{2a} & \text{für } |t| < a, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \text{ für ein festes } 0 < a < \pi,$$

$$(ii) f_2(t) = |\sin(t)|,$$

für jedes $t \in [-\pi, \pi)$. Für welche $t \in [-\pi, \pi)$ konvergiert die jeweilige Fourier-Reihe? In welchen $t \in [-\pi, \pi)$ stellt sie die jeweilige Funktion dar? Ist die Konvergenz gleichmäßig?

b) Berechnen Sie die folgenden Reihenwerte:

$$(i) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(ak)}{k} \text{ für ein festes } 0 < a < \pi,$$

$$(ii) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2 - 1},$$

$$(iii) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}.$$

AUFGABE 8 (TUTORIUM)

Berechnen Sie eine Orthonormalbasis von $U = \text{lin}(\{v_1, v_2, v_3\}) \subseteq \mathbb{R}^5$, die Orthogonalprojektion P_U von x auf U , sowie den Abstand $d(x, U) = \min_{y \in U} \|x - y\|$ mit

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

AUFGABE 9 (ÜBUNG)

a) Sei $f \in C_{\text{per}}([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ differenzierbar mit $f' \in C_{\text{per}}([-\pi, \pi], \mathbb{C})$. Zeigen Sie, dass

$$\widehat{f'}(k) = ik\hat{f}(k) \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

b) Sei $f \in C_{\text{per}}([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ unendlich oft differenzierbar mit $f^{(n)} \in C_{\text{per}}([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie, dass

$$\sup_{k \in \mathbb{Z}} |k^N \hat{f}(k)| < \infty \quad \forall N \in \mathbb{N}.$$

AUFGABE 10 (TUTORIUM)

Berechnen Sie die reellen Fourier-Koeffizienten der Funktionen $f_1, f_2, f_3 : [-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{C}$ mit

(i) $f_1(t) = |t|$,

(ii) $f_2(t) = \cosh(t)$,

(iii) $f_3(t) = e^{bt}$ für ein festes $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

für jedes $t \in [-\pi, \pi)$. Für welche $t \in [-\pi, \pi)$ konvergiert die jeweilige Fourier-Reihe? In welchen $t \in [-\pi, \pi)$ stellt sie die jeweilige Funktion dar? Ist die Konvergenz gleichmäßig?

AUFGABE 11 (ÜBUNG)

Ist

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{\sqrt{k}}$$

die Fourierreihe einer Funktion $f \in C_{\text{per}}([-\pi, \pi], \mathbb{C})$?

Hinweis: Benutzen Sie die Besselsche Ungleichung.

AUFGABE 12 (TUTORIUM)

Berechnen Sie die folgenden Reihenwerte:

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$,

b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2 + a}$ für ein festes $a > 0$.