

HÖHERE MATHEMATIK II FÜR DIE FACHRICHTUNG PHYSIK

LÖSUNGSVORSCHLÄGE ZUM 2. ÜBUNGSBLATT

AUFGABE 7 (ÜBUNG)

a) Berechnen Sie die reellen Fourier-Koeffizienten der Funktionen $f_1, f_2 : [-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$(i) f_1(t) = \begin{cases} \frac{1}{2a} & \text{für } |t| < a, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \text{ für ein festes } 0 < a < \pi,$$

$$(ii) f_2(t) = |\sin(t)|,$$

für jedes $t \in [-\pi, \pi)$. Für welche $t \in [-\pi, \pi)$ konvergiert die jeweilige Fourier-Reihe? In welchen $t \in [-\pi, \pi)$ stellt sie die jeweilige Funktion dar? Ist die Konvergenz gleichmäßig?

b) Berechnen Sie die folgenden Reihenwerte:

$$(i) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(ak)}{k} \text{ für ein festes } 0 < a < \pi,$$

$$(ii) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2 - 1},$$

$$(iii) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}.$$

LÖSUNGSVORSCHLAG

a) (i) Da f_1 eine gerade Funktion ist, ist $b_k(f_1) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Für $k = 0$ ist

$$a_0(f_1) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(0 \cdot t) f_1(t) dt = \frac{1}{2a\pi} \int_{-a}^a 1 dt = \frac{1}{\pi},$$

während für $k \in \mathbb{N}$

$$a_k(f_1) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(k \cdot t) f_1(t) dt = \frac{1}{2a\pi} \int_{-a}^a \cos(kt) dt = \frac{1}{2ak\pi} [\sin(kt)]_{t=-a}^a = \frac{\sin(ak)}{ak\pi}$$

gilt.

Mit der Zerlegung $\{-\pi, -a, a, \pi\}$ ist f_1 stückweise glatt, also stetig differenzierbar auf den offenen Intervall und die einseitigen Grenzwerte der Funktion und ihrer Ableitung an den Intervallgrenzen existieren. Deshalb konvergiert die Fourier-Reihe für jedes $t \in [-\pi, \pi)$ gegen $\frac{f_1(t+) + f_1(t-)}{2}$. Insbesondere stellt die Fourier-Reihe für jedes $t \in [-\pi, \pi) \setminus \{-a, a\}$ die Funktion f_1 dar, da f_1 dort stetig ist. Für $t_0 \in \{-a, a\}$ gilt

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}_1(k) = \frac{(f_1(t_0+) + (f_1(t_0-)))}{2} = \frac{1}{4a}.$$

Folglich kann die Konvergenz auch nicht gleichmäßig sein, da die Grenzfunktion unstetig bei $-a$ und a ist.

(ii) Da f_2 eine gerade Funktion ist, ist $b_k(f_2) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Für $k = 0$ ist

$$a_0(f_2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(0 \cdot t) |\sin(t)| dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(t) dt = \frac{2}{\pi} [-\cos(t)]_{t=0}^{t=\pi} = \frac{4}{\pi}.$$

Für $a_k(f_2)$ mit $k \in \mathbb{N}$ berechnen wir vorbereitend

$$\int \underbrace{\sin(t)}_{u'} \underbrace{\cos(kt)}_v dt = -\cos(t) \cos(kt) - k \int \cos(t) \sin(kt) dt.$$

Für $k = 1$ ist also

$$\int \sin(t) \cos(kt) dt = -\frac{1}{2} \cos^2(t),$$

für $k > 1$ führt eine weitere partielle Integration auf

$$\begin{aligned} -\cos(t) \cos(kt) - k \int \underbrace{\cos(t)}_{u'} \underbrace{\sin(kt)}_v dt &= -\cos(t) \cos(kt) - k \left(\sin(t) \sin(kt) - k \int \sin(t) \cos(kt) dt \right) \\ \Rightarrow \int \sin(t) \cos(kt) dt &= \frac{1}{k^2 - 1} (\cos(t) \cos(kt) + k \sin(t) \sin(kt)). \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} a_k(f_2) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kt) f_2(t) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(kt) \sin(t) dt \\ &= \begin{cases} -\frac{1}{\pi} [\cos^2(t)]_{t=0}^{\pi} = 0 & \text{für } k = 1, \\ \frac{2}{\pi(k^2 - 1)} [\cos(t) \cos(kt) + k \sin(t) \sin(kt)]_{t=0}^{\pi} = -\frac{2}{\pi} \cdot \frac{1 + (-1)^k}{k^2 - 1} & \text{für } k > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Mit der Zerlegung $\{-\pi, \pi\}$ ist f_2 stückweise glatt, also stetig differenzierbar auf den offenen Intervall und die einseitigen Grenzwerte der Funktion und ihrer Ableitung an den Intervallgrenzen existieren. Deshalb konvergiert die Fourier-Reihe für jedes $t \in [-\pi, \pi)$ gegen $\frac{f_2(t+) + f_2(t-)}{2}$. Da die periodische Fortsetzung von f_2 , wegen $f_2(-\pi) = \lim_{t \rightarrow \pi^-} f_2(t) = 0$, stetig ist, stellt die Fourier-reihe für jedes $t \in [-\pi, \pi)$ die Funktion f_2 dar. Wegen

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k(f_2) \cos(kt)| \leq \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty,$$

ist die Fourierreihe nach Satz 7.18 (2) aus HM 1 gleichmäßig konvergent, da wir die Summanden gliedweise und unabhängig von t nach oben durch eine konvergente Reihe abgeschätzt haben.

b) (i) Nach a) (i) gilt, dass die Funktion f_1 außerhalb von $\pm a$ mit ihrer Fourierreihe übereinstimmt. Für $t = 0$ ergibt sich also

$$\frac{1}{2a} = f_1(0) = \frac{1}{2\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(ak)}{ak\pi},$$

also

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(ak)}{k} = \frac{\pi - a}{2}$$

(ii) Gleich wie in (i) folgt, dass

$$0 = f_2(0) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2 - 1}$$

und somit

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2 - 1} = \frac{1}{2}$$

(iii) Laut Vorlesung lauten die Fourier-Koeffizienten der Funktion $f : [-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{C}$, definiert durch $f(t) = t^2$, gerade

$$\hat{f}(0) = \frac{\pi^2}{3}, \quad \hat{f}(k) = \frac{2(-1)^k}{k^2}$$

für alle $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Nach Satz 16.4 (1) gilt

$$\|f\|^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(k)|^2 = \frac{\pi^4}{9} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^4}$$

Einsetzen von $\|f\|_2^2 = \frac{2\pi^5}{5}$ liefert

$$\frac{\pi^4}{5} = \frac{\pi^4}{9} + 8 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4},$$

wodurch sich durch Auflösen

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

ergibt.

AUFGABE 8 (TUTORIUM)

Berechnen Sie eine Orthonormalbasis von $U = \text{lin}(\{v_1, v_2, v_3\}) \subseteq \mathbb{R}^5$, die Orthogonalprojektion Px von x auf U , sowie den Abstand $d(x, U) = \min_{y \in U} \|x - y\|$ mit

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

LÖSUNGSVORSCHLAG

Wir berechnen mit Hilfe des Gram-Schmidt-Verfahrens (vgl. Abschnitt 15.2 der Vorlesung) ein Orthonormalsystem $B = \{b_1, b_2, b_3\}$, welches U erzeugt, wie folgt:

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{v_1}{\|v_1\|} \\ c_2 &= v_2 - (v_2|b_1)b_1 & b_2 &= \frac{c_2}{\|c_2\|} \\ c_3 &= v_3 - (v_3|b_1)b_1 - (v_3|b_2)b_2 & b_3 &= \frac{c_3}{\|c_3\|} \end{aligned}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} \|v_1\| &= \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3} & \Rightarrow b_1 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ (v_2|b_1) &= \frac{1}{\sqrt{3}}(1 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0) = \frac{3}{\sqrt{3}} & \Rightarrow c_2 &= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \|c_2\| &= \sqrt{3} & \Rightarrow b_2 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ (v_3|b_1) &= \frac{1}{\sqrt{3}}, (v_3|b_2) = \frac{1}{\sqrt{3}} & \Rightarrow c_3 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \|c_3\| &= \sqrt{\frac{12}{9}} = \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} & \Rightarrow b_3 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nach Abschnitt 15.8 der Vorlesung ist die Orthogonalprojektion Px gegeben durch:

$$Px = (x|b_1)b_1 + (x|b_2)b_2 + (x|b_3)b_3$$

Wir berechnen:

$$(x|b_1) = \frac{7}{\sqrt{3}}, \quad (x|b_2) = \frac{2}{\sqrt{3}}, \quad (x|b_3) = \frac{6}{\sqrt{3}}$$

Es folgt:

$$Px = \frac{7}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{6}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 8 \\ 13 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Schließlich ist nach Abschnitt 15.8 der Vorlesung:

$$d(x, U) = \min_{y \in U} \|x - y\| = \|x - Px\|$$

Wir berechnen:

$$x - Px = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 8 \\ 13 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ 15 \end{pmatrix}, \quad \|x - Px\| = \frac{\sqrt{228}}{3} \approx 5,03$$

AUFGABE 9 (ÜBUNG)

a) Sei $f \in C_{\text{per}}([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ differenzierbar mit $f' \in C_{\text{per}}([-\pi, \pi], \mathbb{C})$. Zeigen Sie, dass

$$\widehat{f}'(k) = ik \widehat{f}(k) \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

b) Sei $f \in C_{\text{per}}([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ unendlich oft differenzierbar mit $f^{(n)} \in C_{\text{per}}([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie, dass

$$\sup_{k \in \mathbb{Z}} |k^N \widehat{f}(k)| < \infty \quad \forall N \in \mathbb{N}.$$

LÖSUNGSVORSCHLAG

a) Für $k = 0$ gilt wegen der Periodizität von f

$$\widehat{f}'(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) dt = \frac{f(\pi) - f(-\pi)}{2\pi} = 0 = i \cdot 0 \cdot \widehat{f}(0).$$

Für $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ erhalten wir mit Hilfe von partieller Integration

$$\widehat{f}'(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) e^{-ikt} dt = \frac{1}{2\pi} \underbrace{[f(t) e^{-ikt}]_{t=-\pi}^{\pi}}_{=0, \text{ da } 2\pi\text{-per.}} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) i k e^{-ikt} dt = ik \widehat{f}(k).$$

b) Sei $N \in \mathbb{N}$. Wenden wir die Formel aus a) für die Fourierkoeffizienten von $f^{(N)}$ N Mal an, so erhalten wir

$$\widehat{f^{(N)}}(k) = ik \widehat{f^{(N-1)}}(k) = \dots = (ik)^N \widehat{f}(k) \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Wegen $f^{(N)} \in C_{\text{per}}([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ gilt $\sup_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{f^{(N)}}(k)| < \infty$, denn: Aus Satz 16.4 (bzw. auch 15.9) folgt die Konvergenz von $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{f^{(N)}}(k)|^2$, also die Beschränktheit von der Folge $(|\widehat{f^{(N)}}(k)|^2)_{k \in \mathbb{Z}}$

und somit auch von $(|\widehat{f^{(N)}}(k)|)_{k \in \mathbb{Z}}$. Somit gilt

$$\sup_{k \in \mathbb{Z}} |k^N \hat{f}(k)| = \sup_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{f^{(N)}}(k)| < \infty.$$

Dies bedeutet, dass die Fourierkoeffizienten schneller abfallen als jede Potenz von $\frac{1}{|k|}$.

AUFGABE 10 (TUTORIUM)

Berechnen Sie die reellen Fourier-Koeffizienten der Funktionen $f_1, f_2, f_3 : [-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{C}$ mit

- a) $f_1(t) = |t|$,
- b) $f_2(t) = \cosh(t)$,
- c) $f_3(t) = e^{bt}$ für ein festes $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

für jedes $t \in [-\pi, \pi)$. Für welche $t \in [-\pi, \pi)$ konvergiert die jeweilige Fourier-Reihe? In welchen $t \in [-\pi, \pi)$ stellt sie die jeweilige Funktion dar? Ist die Konvergenz gleichmäßig?

LÖSUNGSVORSCHLAG

a) Da f_1 eine gerade Funktion ist, folgt $b_k(f_1) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Es gilt

$$a_0(f_1) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |t| dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t dt = \pi$$

sowie

$$\begin{aligned} a_k(f_1) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |t| \cos(kt) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \cos(kt) dt \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\underbrace{\left[\frac{1}{k} t \sin(kt) \right]_{t=0}^{\pi}}_{=0} - \frac{1}{k} \int_0^{\pi} \sin(kt) dt \right) = \frac{2}{\pi k^2} [\cos(kt)]_{t=0}^{\pi} = 2 \frac{(-1)^k - 1}{\pi k^2} \end{aligned}$$

für $k \in \mathbb{N}$. Mit der Zerlegung $\{-\pi, \pi\}$ ist f_1 stückweise glatt, also stetig differenzierbar auf den offenen Intervall und die einseitigen Grenzwerte der Funktion und ihrer Ableitung an den Intervallgrenzen existieren. Deshalb konvergiert die Fourier-Reihe für jedes $t \in [-\pi, \pi)$ gegen $\frac{f_1(t+) + f_1(t-)}{2}$. Da die periodische Fortsetzung von f_1 , wegen $f_1(-\pi) = \lim_{t \rightarrow \pi^-} f_1(t) = \pi$, stetig ist, stellt die Fourier-Reihe für jedes $t \in [-\pi, \pi)$ die Funktion f_1 dar. Wegen

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k(f_1) \cos(kt)| \leq 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$$

und der Konvergenz von $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$ (Teil der konvergenten, positiven Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$) ist die Fourierreihe nach Satz 7.18 (2) aus HM 1 gleichmäßig konvergent, da wir die Summanden gliedweise und unabhängig von t nach oben durch eine konvergente Reihe abgeschätzt haben.

b) Da f_2 eine gerade Funktion ist, ist $b_k(f_2) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Für $k = 0$ ist

$$a_0(f_2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(0 \cdot t) f_2(t) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cosh(t) dt = \frac{2}{\pi} [\sinh(t)]_{t=0}^{\pi} = \frac{2 \sinh(\pi)}{\pi}.$$

Für $a_k(f_2)$ mit $k \in \mathbb{N}$ berechnen wir vorbereitend

$$\begin{aligned} \int \underbrace{\cosh(t)}_{u'} \underbrace{\cos(kt)}_v dt &= \sinh(t) \cos(kt) + k \int \underbrace{\sinh(t)}_{u'} \underbrace{\sin(kt)}_v dt \\ &= \sinh(t) \cos(kt) + k \cosh(t) \sin(kt) - k^2 \int \cosh(t) \cos(kt) dt \\ \Rightarrow \int \cosh(t) \cos(kt) dt &= \frac{1}{k^2 + 1} (\sinh(t) \cos(kt) + k \cosh(t) \sin(kt)). \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} a_k(f_2) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kt) f_2(t) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(kt) \cosh(t) dt \\ &= \frac{2}{\pi(k^2 + 1)} [\sinh(t) \cos(kt) + k \cosh(t) \sin(kt)]_{t=0}^{\pi} = \frac{2 \sinh(\pi)}{\pi} \cdot \frac{(-1)^k}{k^2 + 1}. \end{aligned}$$

Mit der Zerlegung $\{-\pi, \pi\}$ ist f_2 stückweise glatt, also stetig differenzierbar auf den offenen Intervall und die einseitigen Grenzwerte der Funktion und ihrer Ableitung an den Intervallgrenzen existieren. Deshalb konvergiert die Fourier-Reihe für jedes $t \in [-\pi, \pi)$ gegen $\frac{f_2(t+) + f_2(t-)}{2}$. Da die periodische Fortsetzung von f_2 , wegen $f_2(-\pi) = \lim_{t \rightarrow \pi-} f_2(t) = \cosh(\pi)$, stetig ist, stellt die Fourier-Reihe für jedes $t \in [-\pi, \pi)$ die Funktion f_2 dar. Wegen

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k(f_2) \cos(kt)| \leq \frac{2 \sinh(\pi)}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty,$$

ist die Fourierreihe nach Satz 7.18 (2) aus HM 1 gleichmäßig konvergent, da wir die Summanden gliedweise und unabhängig von t nach oben durch eine konvergente Reihe abgeschätzt haben.

c) Berechne zunächst die komplexen Fourier-Koeffizienten von f_3 . Für jedes $k \in \mathbb{Z}$ ist

$$\begin{aligned} \hat{f}_3(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{bt} e^{-ikt} dt = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{b - ik} [e^{(b-ik)t}]_{t=-\pi}^{t=\pi} = \frac{1}{\pi} \frac{1}{b - ik} \frac{e^{(b-ik)\pi} - e^{-(b-ik)\pi}}{2} \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{1}{b - ik} \frac{\overbrace{e^{b\pi}}^{=(-1)^k} \overbrace{e^{ik\pi}}^{=(-1)^k} - \overbrace{e^{-b\pi}}^{=(-1)^k} \overbrace{e^{-ik\pi}}^{=(-1)^k}}{2} = \frac{1}{\pi} \sinh(b\pi) \frac{(-1)^k}{b - ik} = \sinh(b\pi) \frac{1}{\pi} (-1)^k \frac{b + ik}{b^2 + k^2}. \end{aligned}$$

Für die reellen Fourier-Koeffizienten gilt nach Vorlesung

$$a_k(f_3) = \hat{f}_3(k) + \hat{f}_3(-k), \quad b_k(f_3) = i(\hat{f}_3(k) - \hat{f}_3(-k))$$

für alle $k \in \mathbb{N}_0$ und alle $j \in \mathbb{N}$. Folglich ist

$$a_0(f_3) = \frac{2 \sinh(b\pi)}{\pi b}, \quad a_k(f_3) = \frac{2 \sinh(b\pi)}{\pi} \frac{(-1)^k b}{b^2 + k^2}, \quad \text{sowie} \quad b_k(f_3) = \frac{2 \sinh(b\pi)}{\pi} \frac{(-1)^{k+1} k}{b^2 + k^2}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$.

Mit der Zerlegung $\{-\pi, \pi\}$ ist f_3 stückweise glatt, also stetig differenzierbar auf den offenen Intervall und die einseitigen Grenzwerte der Funktion und ihrer Ableitung an den Intervallgrenzen existieren. Deshalb konvergiert die Fourier-Reihe für jedes $t \in [-\pi, \pi)$ gegen $\frac{f_3(t+) + f_3(t-)}{2}$.

Die periodische Fortsetzung von f_3 ist wegen $f(-\pi) = e^{-b\pi} \neq e^{b\pi} = \lim_{t \rightarrow \pi^-} f_3(t)$ in $-\pi$ unstetig, weshalb die Fourierreihe dort nicht gegen f_3 konvergiert (sondern gegen $\frac{e^{b\pi} + e^{-b\pi}}{2}$) und die Konvergenz wegen der Unstetigkeit auch nicht gleichmäßig sein kann.

AUFGABE 11 (ÜBUNG)

Ist

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{\sqrt{k}}$$

die Fourierreihe einer Funktion $f \in C_{\text{per}}([-\pi, \pi], \mathbb{C})$?

Hinweis: Benutzen Sie die Besselsche Ungleichung.

LÖSUNGSVORSCHLAG

Angenommen, es existiert eine Funktion $f \in C_{\text{per}}([-\pi, \pi], \mathbb{C})$, deren reelle Fourierkoeffizienten gegen sind durch $a_k = 0$ ($k \in \mathbb{N}_0$) und $b_k = \frac{1}{\sqrt{k}}$ ($k \in \mathbb{N}$). Da die Funktionen $e_k = e^{ik}$ ein vollständiges Orthonormalsystem von $C_{\text{per}}([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ sind, folgt nach der Besselschen Ungleichung

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2 \leq \|f\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx < \infty,$$

Da stetige Funktionen (wie $x \mapsto |f(x)|^2$) Riemann-integrierbar auf kompakten Intervallen sind. Für die Fourierkoeffizienten gilt

$$\hat{f}(0) = 0, \quad \hat{f}(k) = \frac{1}{2}(a_k - ib_k) = -\frac{i}{2\sqrt{k}}, \quad \hat{f}(-k) = \frac{1}{2}(a_k + ib_k) = \frac{i}{2\sqrt{k}}$$

für $k \in \mathbb{N}$. Wir erhalten

$$\infty > \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2 = \lim_{K \rightarrow \infty} \sum_{k=-K}^K |\hat{f}(k)|^2 = \lim_{K \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^K (|\hat{f}(k)|^2 + |\hat{f}(-k)|^2) = \lim_{K \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^K \frac{1}{2k}.$$

Somit würde die harmonische Reihe konvergieren, ein Widerspruch. Also existiert keine solche Funktion.

AUFGABE 12 (TUTORIUM)

Berechnen Sie die folgenden Reihenwerte:

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$,

b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2 + a}$ für ein festes $a > 0$.

LÖSUNGSVORSCHLAG

a) Nach **AUFGABE 10 a)** lauten die Fourier-Koeffizienten der Funktion $f_1 : (-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$, definiert durch $f_1(t) = |t|$ gerade

$$a_0(f_1) = \pi, \quad a_k(f_1) = \begin{cases} 0 & \text{für } k = 2m, \\ -\frac{4}{\pi k^2} & \text{für } k = 2m-1 \end{cases}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Da f_1 in allen Punkten durch ihre Fourierreihe dargestellt wird, gilt

$$0 = f_1(0) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^2}.$$

Folglich ist

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

b) Nach **AUFGABE 10 b)** lauten die reellen Fourier-Koeffizienten der Funktion $f_3 : (-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$, definiert durch $f_3(t) = e^{bt}$ für ein $b \neq 0$, gerade

$$a_0(f_3) = \frac{2 \sinh(b\pi)}{\pi b}, \quad a_k(f_3) = \frac{2 \sinh(b\pi)}{\pi} \frac{(-1)^k b}{b^2 + k^2}, \quad b_k(f_3) = \frac{2 \sinh(b\pi)}{\pi} \frac{(-1)^{k+1} k}{b^2 + k^2}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Es gilt

$$1 = f_3(0) = \frac{\sinh(b\pi)}{\pi b} + \frac{2b \sinh(b\pi)}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{b^2 + k^2}$$

und somit

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{b^2 + k^2} = \frac{\pi}{2b \sinh(b\pi)} - \frac{1}{2b^2}$$

Mit $b = \sqrt{a}$ folgt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2 + a} = \frac{\pi}{2\sqrt{a} \sinh(\sqrt{a}\pi)} - \frac{1}{2a}$$