

HÖHERE MATHEMATIK II FÜR DIE FACHRICHTUNG PHYSIK

3. ÜBUNGSBLATT

AUFGABE 13 (ÜBUNG)

Zeigen Sie, dass der normierte Raum $(C[-1, 1], \|\cdot\|_2)$ mit

$$\|f\|_2 = \left(\int_{-1}^1 |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \quad \forall f \in C[-1, 1]$$

kein Banachraum ist.

AUFGABE 14 (TUTORIUM)

Sei $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie die Determinante von A , indem Sie

- a) die Regel von Sarrus verwenden.
- b) nach der ersten Zeile entwickeln.
- c) durch Spaltenumformungen einen Einheitsvektor erzeugen und nach diesem entwickeln.

AUFGABE 15 (ÜBUNG)

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $z \in \mathbb{C}$. Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$B_n(z) = \begin{pmatrix} 1+z^2 & z & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ z & 1+z^2 & z & 0 & & & \vdots \\ 0 & z & 1+z^2 & z & 0 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & z & 1+z^2 & z & 0 \\ \vdots & & & 0 & z & 1+z^2 & z \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & z & 1+z^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n \times n}.$$

AUFGABE 16 (TUTORIUM)

Berechnen Sie die Determinanten der folgenden reellen Matrizen.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 15 \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 35 \\ 1 & 5 & 15 & 35 & 70 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, D_\alpha = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & \alpha+1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist D_α regulär?

AUFGABE 17 (ÜBUNG)

Sei $b \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ fest. Berechnen Sie für die lineare Abbildung

$$T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad Ta = a \times b,$$

- a) die Adjungierte T^* ,
- b) Kern(T),
- c) Bild(T).

Hinweis: Verwenden Sie **AUFGABE 1 a)**

AUFGABE 18 (TUTORIUM)

Für $\alpha \in \mathbb{R}$ sei das reelle lineare Gleichungssystem $A_\alpha x = b_\alpha$ gegeben durch:

$$\begin{cases} (\alpha - 2) \cdot x + (\alpha - 1) \cdot y - (\alpha - 1) \cdot z = 0 \\ (6 - 3\alpha) \cdot x + (\alpha^2 - 1) \cdot y + (\alpha - 1) \cdot z = 0 \\ (\alpha^2 - \alpha - 2) \cdot x + \alpha(\alpha - 1) \cdot y - \alpha(\alpha - 1) \cdot z = \alpha - 1. \end{cases}$$

- a) Berechnen Sie die Determinante der Koeffizientenmatrix A_α .
- b) Finden Sie für diejenigen α , für welche obiges Gleichungssystem eindeutig lösbar ist, die Lösung mittels der Cramerschen Regel.