Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Sebastian Schwarz

SS 2019
09.05.2019

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 3. Übungsblatt

Aufgabe 13 (Übung)

Zeigen Sie, dass der normierte Raum $(C[-1,1], \|\cdot\|_2)$ mit

$$\|f\|_2 = \left(\int_{-1}^{1} |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \forall f \in C[-1,1]$$

kein Banachraum ist.

Lösungsvorschlag

Wir definieren die Funktionenfolge

$$f_n(x) = \begin{cases} -1 & , -1 \leqslant x \leqslant -\frac{1}{n}, \\ nx & , -\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n}, \\ 1 & , \frac{1}{n} \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

Jede dieser Funktionen liegt offensichtlich in $C[-1,1]$. Wir zeigen, dass die Folge eine Cauchyfolge in $(C[-1,1], \|\cdot\|_2)$ ist. Für $m \geqslant n$ gilt

$$f_m(x) - f_n(x) = \begin{cases} -1 - nx & , -\frac{1}{n} \leqslant x \leqslant -\frac{1}{m}, \\ (m-n)x & , -\frac{1}{m} < x < \frac{1}{m}, \\ 1 - nx & , \frac{1}{m} \leqslant x \leqslant \frac{1}{n}, \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$

Die Funktionen unterscheiden sich demnach nur auf $[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$ und dort um maximal 1 Deshalb gilt

$$\|f_m - f_n\|_2^2 \leqslant \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} 1^2 \, \mathrm{d}x = \frac{2}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Wäre $(C[-1,1], \|\cdot\|_2)$ ein Banachraum, so müsste nun die eine stetige Grenzfunktion existieren, gegen die (f_n) in der $\|\cdot\|$-Norm konvergiert. Eine Funktion, gegen die (f_n) konvergiert, ist durch die unstetige Funktion

$$f(x) = \begin{cases} -1 & , -1 \leqslant x < 0, \\ 0 & x = 0, \\ 1 & , 0 < x \leqslant 1. \end{cases}$$

gegeben. Dies liegt an

$$\|f_n - f\|_2^2 = 2\int_0^{\frac{1}{n}} (1-nx)^2 \, \mathrm{d}x \leqslant 2\int_0^{\frac{1}{n}} 1 \, \mathrm{d}x = \frac{2}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Gäbe es eine weitere Funktion g, die dies erfüllt, so wäre

$$\|f-g\|_2 \leqslant \|f-f_n\|_2 + \|f_n-g\|_2 \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

also $\|f-g\|_2 = 0$ und somit auch

$$\|f-g\|_2^2 = \int_{-1}^{1} |f(x)-g(x)|^2 = 0.$$

Somit ist auch jeder Teil dieses Integrals 0, da der Integrand nicht-negativ ist. Wäre $g(x_0) \neq 1$ für ein $x_0 > 0$, so wäre $|f(x)-g(x)|^2$ in einer Umgebung von x_0 positiv und das Integral somit ebenfalls (da g stetig, vgl. Auf. 59 b) aus HM 1), gleiches gilt für $g(x_0) \neq -1$ für ein $x_0 < 0$. Also gilt $g(x) = -1$ für $x < 0$ und $g(x) = 1$ für $x > 0$, womit g nicht stetig in 0 sein kann.

Aufgabe 14 (Tutorium)

Sei $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie die Determinante von A, indem Sie

a) die Regel von Sarrus verwenden.

b) nach der ersten Zeile entwickeln.

c) durch Spaltenumformungen einen Einheitsvektor erzeugen und nach diesem entwickeln.

Lösungsvorschlag

a) Die Regel von Sarrus liefert

$$\begin{aligned} \det(A) &= 2\cdot 1\cdot(-2) + 2\cdot 1\cdot 1 + 4\cdot(-1)\cdot(-1) - 4\cdot 1\cdot 1 - 2\cdot(-1)\cdot(-2) - 2\cdot 1\cdot(-1) \\ &= -4+2+4-4-4+2 = -4. \end{aligned}$$

b) Entwickeln nach der ersten Zeile liefert

$$\begin{aligned} \det(A) &= (-1)^{1+1}\cdot 2\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}\cdot 2\cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}\cdot 4\cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 2\cdot((-2)-(-1)) - 2\cdot(2-1) + 4\cdot(1-1) = -2-2 = -4. \end{aligned}$$

c) Es gilt

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 8 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \overset{\text{Entw. 3. Z.}}{=} (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -4.$$

Aufgabe 15 (Übung)

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $z \in \mathbb{C}$. Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$B_n(z) = \begin{pmatrix} 1+z^2 & z & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ z & 1+z^2 & z & 0 & & & \vdots \\ 0 & z & 1+z^2 & z & 0 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & z & 1+z^2 & z & 0 \\ \vdots & & & 0 & z & 1+z^2 & z \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & z & 1+z^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n \times n}.$$

Lösungsvorschlag

Sei $z \in \mathbb{C}$ beliebig. Für $n = 1$ gilt:

$$\det(B_1(z)) = \begin{vmatrix} 1+z^2 \end{vmatrix} = 1 + z^2$$

Für $n = 2$ gilt

$$\det(B_2(z)) = \begin{vmatrix} 1+z^2 & z \\ z & 1+z^2 \end{vmatrix} = (1+z^2)^2 - z^2 = 1 + 2z^2 + z^4 - z^2 = 1 + z^2 + z^4$$

Für alle $n > 2$ gilt nach dem Determinantenentwicklungssatz

$$
\begin{aligned}
\det(B_n(z)) &= \begin{vmatrix} 1+z^2 & z & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ z & 1+z^2 & z & 0 & & & \vdots \\ 0 & z & 1+z^2 & z & 0 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & z & 1+z^2 & z & 0 \\ \vdots & & & 0 & z & 1+z^2 & z \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & z & 1+z^2 \end{vmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times n} \\
&= (1+z^2)\begin{vmatrix} 1+z^2 & z & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ z & 1+z^2 & z & 0 & & & \vdots \\ 0 & z & 1+z^2 & z & 0 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & z & 1+z^2 & z & 0 \\ \vdots & & & 0 & z & 1+z^2 & z \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & z & 1+z^2 \end{vmatrix} \in \mathbb{C}^{(n-1)\times(n-1)} \\
&\quad -z\begin{vmatrix} z & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ z & 1+z^2 & z & 0 & & & \vdots \\ 0 & z & 1+z^2 & z & 0 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & z & 1+z^2 & z & 0 \\ \vdots & & & 0 & z & 1+z^2 & z \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & z & 1+z^2 \end{vmatrix} \in \mathbb{C}^{(n-1)\times(n-1)} \\
&= (1+z^2)\det(B_{n-1}(z)) \\
&\quad -z^2\begin{vmatrix} 1+z^2 & z & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ z & 1+z^2 & z & 0 & & & \vdots \\ 0 & z & 1+z^2 & z & 0 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & z & 1+z^2 & z & 0 \\ \vdots & & & 0 & z & 1+z^2 & z \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & z & 1+z^2 \end{vmatrix} \in \mathbb{C}^{(n-2)\times(n-2)} \\
&= (1+z^2)\det(B_{n-1}(z)) - z^2\det(B_{n-2}(z))
\end{aligned}
$$

Es ist etwa:

$$
\begin{aligned}
\det(B_3(z)) &= (1+z^2)\det(B_2(z)) - z^2\det(B_1(z)) \\
&= (1+z^2)(1+z^2+z^4) - z^2(1+z^2) = (1+z^2)(1+z^4) \\
&= 1+z^2+z^4+z^6
\end{aligned}
$$

Dies legt die Vermutung

$$\det(B_n(z)) = \sum_{m=0}^{n} z^{2m}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ nahe. Diese beweisen wir per Induktion:
IA ($n = 1$, $n = 2$): siehe oben.
IS: Es sei $n \in \mathbb{N}$. Für alle $k \leq n$ gelte die Behauptung (IV)

$$\det(B_k(z)) = \sum_{m=0}^{k} z^{2m}.$$

O.B.d.A. ist $n \geq 2$ (ansonsten benutze (IA)). Dann gilt für $n+1$:

$$\begin{aligned}
\det(B_{n+1}(z)) &\overset{\text{s.o.}}{=} (1+z^2)\det(B_n(z)) - z^2\det(B_{n-1}(z)) \\
&\overset{\text{(IV)}}{=} (1+z^2)\sum_{m=0}^{n} z^{2m} - z^2 \sum_{m=0}^{n-1} z^{2m} \\
&= \sum_{m=0}^{n} z^{2m} + z^2 z^{2n} + z^2 \sum_{m=0}^{n-1} z^{2m} - z^2 \sum_{m=0}^{n-1} z^{2m} \\
&= \sum_{m=0}^{n} z^{2m} + z^{2(n+1)} = \sum_{m=0}^{n+1} z^{2m}
\end{aligned}$$

Aufgabe 16 (Tutorium)

Berechnen Sie die Determinanten der folgenden reellen Matrizen.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 15 \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 35 \\ 1 & 5 & 15 & 35 & 70 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},\ D_\alpha = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & \alpha+1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist D_α regulär?

Lösungsvorschlag

Mit den Rechenregeln für Determinanten folgt:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \cdot(-1)\ \cdot(-1) \\ \cdot(-2) \\ + \\ + \\ + \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \cdot(-2) \\ + \\ \\ \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

Laut Vorlesung ist die Determinante einer oberen rechten Dreiecksmatrix gleich dem Produkt der Diagonalelemente. Also ist $\det(A) = -6$. Als nächstes berechnen wir Es folgt:

$$
\begin{aligned}
\det(B) &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 15 \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 35 \\ 1 & 5 & 15 & 35 & 70 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \cdot(-1)\ \cdot(-1)\ \cdot(-1)\ \cdot(-1) \\ + \\ + \\ + \\ + \end{array} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 9 & 14 \\ 0 & 3 & 9 & 19 & 34 \\ 0 & 4 & 14 & 34 & 69 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \cdot(-2)\ \cdot(-3)\ \cdot(-4) \\ + \\ + \\ + \end{array} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 10 & 22 \\ 0 & 0 & 6 & 22 & 53 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \cdot(-3)\ \cdot(-6) \\ + \\ + \end{array} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 17 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \cdot(-4) \\ + \end{array} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

Nach der Vorlesung ist die Determinante einer oberen rechten Dreiecksmatrix gleich dem Produkt der Diagonalelemente. Also ist $\det(B) = 1$. Weiter gilt

$$
\begin{aligned}
\det(C) &= \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & & + & + \end{array} \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \end{array} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 7 & 3 \\ 4 & 3 & 6 & 5 \end{vmatrix} \overset{\text{Entw. 2. Z.}}{=} (-1)^{1+2} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ -1 & 7 & 3 \\ 3 & 6 & 5 \end{vmatrix} \begin{array}{l} + \\ \cdot 2\ \cdot 3 \\ + \end{array} \\
&= \begin{vmatrix} 0 & 18 & 11 \\ -1 & 7 & 3 \\ 0 & 27 & 14 \end{vmatrix} \overset{\text{Entw. 1. S.}}{=} (-1)^{1+2} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 18 & 11 \\ 27 & 14 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \cdot(-1) \\ + \end{array} = \begin{vmatrix} 18 & 11 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} = 54 - 99 = -45.
\end{aligned}
$$

Zuletzt gilt

$$
\begin{aligned}
\det(D_\alpha) &= \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 & \alpha+1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & \alpha \end{vmatrix} \begin{array}{l} + \\ \qquad \cdot(-1) \\ \\ \cdot(-1)\ + \end{array} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & \alpha-2 \end{vmatrix} \overset{\text{Entw. 2. S.}}{=} (-1)^{2+2} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \cdot(-1) & & + \end{array} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & \alpha-2 \end{vmatrix} \end{array} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & \alpha-4 \end{vmatrix} \overset{\text{Entw. 1. Z.}}{=} (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \alpha-4 \end{vmatrix} = (\alpha-4) - 1 = \alpha - 5,
\end{aligned}
$$

womit C genau dann regulär ist, wenn $\alpha \neq 5$ gilt.

Aufgabe 17 (Übung)

Sei $b \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ fest. Berechnen Sie für die lineare Abbildung

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad Ta = a \times b,$$

a) die Adjungierte T^*,

b) $\operatorname{Kern}(T)$,

c) $\operatorname{Bild}(T)$.

Hinweis: Verwenden Sie **Aufgabe 1 a)**

Lösungsvorschlag

a) Seien $a, c \in \mathbb{R}^3$. Es gilt:

$$(Ta|c) = (a \times b|c) \overset{17.10}{=} \det(a,b,c) \overset{17.2}{=} -\det(c,b,a) \overset{17.10}{=} -(c \times b|a) \overset{(S1)}{=} (a|-Tc) = (a|T^*c)$$

Also ist $T^* = -T$.

b) Nach 17.11 (5) für alle $a \in \mathbb{R}^3$

$$0 = Ta = a \times b \Leftrightarrow a, b \text{ linear abhängig},$$

also ist $\operatorname{Kern}(T) = \operatorname{lin}(\{b\})$.

c) Nach Aufgabe 1 (a) gilt $\operatorname{Bild}(T) = \operatorname{Kern}(T^*)^\perp$. Mit (i) und (ii) folgt

$$\operatorname{Bild}(T) = \operatorname{Kern}(T)^\perp = \operatorname{lin}(\{b\})^\perp = \left\{a \in \mathbb{R}^3 : (a|b) = 0\right\}.$$

Aufgabe 18 (Tutorium)

Für $\alpha \in \mathbb{R}$ sei das reelle lineare Gleichungssystem $A_\alpha x = b_\alpha$ gegeben durch:

$$\left\{ \begin{array}{rl} (\alpha-2)\cdot x + \quad (\alpha-1)\cdot y - \quad (\alpha-1)\cdot z = & 0 \\ (6-3\alpha)\cdot x + (\alpha^2-1)\cdot y + \quad (\alpha-1)\cdot z = & 0 \\ (\alpha^2-\alpha-2)\cdot x + \alpha(\alpha-1)\cdot y - \alpha(\alpha-1)\cdot z = & \alpha - 1. \end{array} \right.$$

a) Berechnen Sie die Determinante der Koeffizientenmatrix A_α.

b) Finden Sie für diejenigen α, für welche obiges Gleichungssystem eindeutig lösbar ist, die Lösung mittels der Cramerschen Regel.

Lösungsvorschlag

a) Es gilt

$$
\begin{aligned}
\det(A_\alpha) &= \begin{vmatrix} \alpha-2 & \alpha-1 & -(\alpha-1) \\ 3(2-\alpha) & (\alpha+1)(\alpha-1) & (\alpha-1) \\ (\alpha-2)(\alpha+1) & \alpha(\alpha-1) & -\alpha(\alpha-1) \end{vmatrix} = (\alpha-2)(\alpha-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & \alpha+1 & 1 \\ \alpha+1 & \alpha & -\alpha \end{vmatrix} \\
&= (\alpha-2)(\alpha-1)^2 \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -2 & \alpha+2 & 1 \\ 1 & 0 & -\alpha \end{vmatrix} \overset{\text{Entw. 3. S.}}{=} (-1)^{1+3} \cdot (-1) \cdot (\alpha-2)(\alpha-1)^2 \begin{vmatrix} -2 & \alpha+2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\
&= (\alpha-2)(\alpha-1)^2(\alpha+2).
\end{aligned}
$$

Die Matrix A_α ist also invertierbar für alle $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1, 2\}$.

b) Cramersche Regel: Ist $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ invertierbar, $A = (a_1, \ldots, a_n)$, so sind die Komponenten der Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ (mit $b \in \mathbb{K}^n$) gegeben durch

$$
x_j = \frac{\det(a_1, \ldots, a_{j-1}, b, a_{j+1}, \ldots, a_n)}{\det(A)} \qquad (j = 1, \ldots, n).
$$

Um die Lösung des gegebenen linearen Gleichungssystems zu berechnen, benötigen wir also die folgenden Determinanten:

$$
D_1 := \begin{vmatrix} 0 & \alpha-1 & -(\alpha-1) \\ 0 & (\alpha+1)(\alpha-1) & \alpha-1 \\ \alpha-1 & \alpha(\alpha-1) & -\alpha(\alpha-1) \end{vmatrix} = (\alpha-1) \begin{vmatrix} \alpha-1 & -(\alpha-1) \\ (\alpha+1)(\alpha-1) & \alpha-1 \end{vmatrix} = (\alpha-1)^3(\alpha+2).
$$

$$
D_2 := \begin{vmatrix} \alpha-2 & 0 & -(\alpha-1) \\ 3(2-\alpha) & 0 & \alpha-1 \\ (\alpha-2)(\alpha+1) & \alpha-1 & -\alpha(\alpha-1) \end{vmatrix} = -(\alpha-1) \begin{vmatrix} \alpha-2 & -(\alpha-1) \\ -3(\alpha-2) & \alpha-1 \end{vmatrix} = 2(\alpha-1)^2(\alpha-2).
$$

$$
\begin{aligned}
D_3 := \begin{vmatrix} \alpha-2 & \alpha-1 & 0 \\ -3(\alpha-2) & (\alpha+1)(\alpha-1) & 0 \\ (\alpha-2)(\alpha+1) & \alpha(\alpha-1) & \alpha-1 \end{vmatrix} &= (\alpha-1) \begin{vmatrix} \alpha-2 & \alpha-1 \\ -3(\alpha-2) & (\alpha+1)(\alpha-1) \end{vmatrix} \\
&= (\alpha-1)^2(\alpha-2)(\alpha+4).
\end{aligned}
$$

Für die Komponenten des Lösungsvektors folgt also

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{D_1}{\det(A_\alpha)} = \frac{(\alpha-1)^3(\alpha+2)}{(\alpha-2)(\alpha-1)^2(\alpha+2)} = \frac{\alpha-1}{\alpha-2} \\
x_2 &= \frac{D_2}{\det(A_\alpha)} = \frac{2(\alpha-1)^2(\alpha+2)}{(\alpha-2)(\alpha-1)^2(\alpha+2)} = \frac{2}{\alpha+2} \\
x_3 &= \frac{D_3}{\det(A_\alpha)} = \frac{(\alpha-1)^2(\alpha-2)(\alpha+4)}{(\alpha-2)(\alpha-1)^2(\alpha+2)} = \frac{\alpha+4}{\alpha+2}.
\end{aligned}
$$