

HÖHERE MATHEMATIK II FÜR DIE FACHRICHTUNG PHYSIK

4. ÜBUNGSBLATT

AUFGABE 19 (ÜBUNG)

Betrachten Sie

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 2 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 2 \end{pmatrix}.$$

- a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von A und geben Sie eine orthogonale Matrix S an, so dass $S^{-1}AS$ Diagonalgestalt hat.
- b) Bestimmen Sie eine Matrix $W \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ derart, dass $W^2 = A$ gilt.

AUFGABE 20 (TUTORIUM)

Betrachten Sie

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

- a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von B und geben Sie eine orthogonale Matrix T an, so dass $T^{-1}BT$ Diagonalgestalt hat.
- b) Berechnen Sie B^k für alle $k \in \mathbb{N}$.

AUFGABE 21 (ÜBUNG)

Seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B_{\alpha, \beta} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 17 & 16 & 15 \\ 9 & 8 & 7 \\ \beta & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Es existiert genau ein Paar (α, β) , sodass A und $B_{\alpha, \beta}$ ähnlich sind. Finden Sie dieses Paar.

AUFGABE 22 (TUTORIUM)

Bestimmen Sie die Eigenwerte und zugehörigen Eigenräume von

$$A = \begin{pmatrix} 22 & -2 & -4 \\ 4 & 16 & -4 \\ 2 & -1 & 16 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Welche algebraischen und geometrischen Vielfachheiten haben die Eigenwerte? Welche Matrix ist diagonalisierbar? Ermitteln Sie, falls möglich, reguläre Matrizen S_A bzw. S_B so, sodass $S_A^{-1}AS_A$ bzw. $S_B^{-1}BS_B$ Diagonalgestalt hat.

AUFGABE 23 (ÜBUNG)

Seien $n \in \mathbb{N}$ und $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Man nennt A und B *simultan diagonalisierbar*, falls es eine reguläre Matrix $S \in \mathbb{C}^{n \times n}$ gibt, so dass sowohl $S^{-1}AS$, als auch $S^{-1}BS$ Diagonalgestalt haben. Zeigen Sie:

- Sind A und B simultan diagonalisierbar, so gilt $AB = BA$.
- Gilt $AB = BA$ und haben überdies alle Eigenwerte von A die algebraische Vielfachheit eins, so sind A und B simultan diagonalisierbar.

Hinweis: Man kann ebenfalls zeigen, dass A und B simultan diagonalisierbar sind, falls $AB = BA$ gilt sowie A und B diagonalisierbar sind.

AUFGABE 24 (TUTORIUM)

Sei $n \in \mathbb{N}$. Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch? Begründen Sie ihre Antwort.

- Ist $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A , so ist auch $\bar{\lambda}$ ein Eigenwert von A .
- Ist $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von A , so existiert ein reeller Eigenvektor $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ von A zum Eigenwert λ .
- Sind $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ und ist $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A sowie $\mu \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von B , so ist $\lambda\mu$ ein Eigenwert von AB .
- Ist $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A , so ist λ^2 ein Eigenwert von A^2 .
- Ist $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und n gerade/ungerade, so besitzt A einen reellen Eigenwert.
- Ist $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ unitär und $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A , so gilt $|\lambda| = 1$.

Klausuren

- Eine **Übungsklausur** (Anmeldung für Studenten mit Scheinplicht bei Dr. Nagato-Plum, Raum 2.029, Geb. 20.30) findet am **06.07.2019** von **9 bis 11 Uhr** im **Benz-Horsaal** statt.
- Die **Modulprüfung HM II** findet am **30.08.2019** von **11 bis 13 Uhr**, die **Modulprüfung HM I** findet am **06.09.2019** von **8 bis 10 Uhr** statt.