

HÖHERE MATHEMATIK II FÜR DIE FACHRICHTUNG PHYSIK

LÖSUNGSVORSCHLÄGE ZUM 4. ÜBUNGSBLATT

AUFGABE 19 (ÜBUNG)

Betrachten Sie

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 2 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 2 \end{pmatrix}.$$

- Bestimmen Sie alle Eigenwerte von A und geben Sie eine orthogonale Matrix S an, so dass $S^{-1}AS$ Diagonalgestalt hat.
- Bestimmen Sie eine Matrix $W \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ derart, dass $W^2 = A$ gilt.

LÖSUNGSVORSCHLAG

- Wir berechnen das charakteristische Polynom (vgl. Satz 18.2 der Vorlesung). Für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 2-\lambda & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 2-\lambda \end{vmatrix} \begin{matrix} \leftarrow + \\ \leftarrow + \\ \cdot(-1) \downarrow + \end{matrix} \\ &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (2-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\sqrt{2} & 2-\lambda \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{Entw. nach} \\ \text{1-ter Zeile} \end{matrix} (2-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\sqrt{2} & 2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (2-\lambda)((2-\lambda)^2 - 1) = (2-\lambda)(2-\lambda-1)(2-\lambda+1) = (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda) \end{aligned}$$

Nach Satz 18.2 der Vorlesung sind die Eigenwerte von A gerade die Nullstellen von p_A , also 1, 2 und 3.

Nach Satz 18.1 der Vorlesung ist für jeden Eigenwert λ von A der Eigenraum $E_A(\lambda)$ gegeben durch

$$E_A(\lambda) = \text{Kern}(A - \lambda I_3).$$

Wir berechnen diese mit Hilfe des Gaußalgorithmus und des (-1) -Tricks:

- $E_A(1)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow_+ \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ \\ \leftarrow_+ \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow_+ \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Also ist $E_A(1) = \text{lin}\{v_1\}$ mit

$$v_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 \end{pmatrix} \text{ bzw. } b_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

- $E_A(2)$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow_+ \cdot \sqrt{2} \\ \\ \leftarrow_+ \cdot \sqrt{2} \end{array} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow_+ \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Also ist $E_A(2) = \text{lin}\{v_2\}$ mit

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ bzw. } b_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- $E_A(3)$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow_+ \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot (-1) \\ \leftarrow_+ \cdot (-1) \\ \leftarrow_+ \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow_+ \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Also ist $E_A(3) = \text{lin}\{v_3\}$ mit

$$v_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 \end{pmatrix} \text{ bzw. } b_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Nach Satz 18.8 der Vorlesung sind Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten von symmetrischen Matrizen immer orthogonal zueinander. Die normierten Vektoren b_1, b_2, b_3 bilden deshalb die orthogonale Matrix

$$S = (b_1, b_2, b_3) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$A = SDS^T \text{ mit } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

b) Definiere

$$D' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

sowie $W = SD'S^T$. Dann ist in der Tat

$$W^2 = (SD'S^T)^2 = SD' \underbrace{S^T S}_{=I_3} D'S^T = SD'D'S^T = S(D')^2 S^T = SDS^T = A.$$

Ausrechnen liefert:

$$W = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 + 2\sqrt{2} + \sqrt{3} & -1 + 2\sqrt{2} - \sqrt{3} & \sqrt{6} - \sqrt{2} \\ -1 + 2\sqrt{2} - \sqrt{3} & 1 + 2\sqrt{2} + \sqrt{3} & \sqrt{2} - \sqrt{6} \\ \sqrt{6} - \sqrt{2} & \sqrt{2} - \sqrt{6} & 2 + 2\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

AUFGABE 20 (TUTORIUM)

Betrachten Sie

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

- Bestimmen Sie alle Eigenwerte von B und geben Sie eine orthogonale Matrix T an, so dass $T^{-1}BT$ Diagonalgestalt hat.
- Berechnen Sie B^k für alle $k \in \mathbb{N}$.

LÖSUNGSVORSCHLAG

(a) Wir berechnen das charakteristische Polynom (vgl. Abschnitt 18.2 der Vorlesung). Für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\begin{aligned} p_B(\lambda) &= \det(B - \lambda I_4) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} \begin{matrix} \leftarrow + \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{matrix} \cdot (-1) \\ &= \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 4-\lambda & 4-\lambda & 0 \\ 0 & \lambda-4 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} \stackrel{(D2)}{=} (4-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (4-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{\text{Entw. nach 4-ten Zeile}}{=} (4-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot (-1) \end{aligned}$$

Also ist $E_B(4) = \text{lin}\{\vec{q}_2, \vec{q}_3, \vec{q}_4\}$ mit

$$\vec{q}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{q}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{q}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Setze

$$v_2 = \vec{q}_2, \quad v_3 = \vec{q}_4 - \vec{q}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \vec{q}_4.$$

Dann ist auch $E_B(4) = \text{lin}\{v_2, v_3, v_4\}$.

Nach Satz 18.8 der Vorlesung sind Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten von symmetrischen Matrizen immer orthogonal zueinander. Wir brauchen also nur den berechneten Erzeuger v_2, v_3, v_4 von $E_B(4)$ dem Gram-Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren zu unterziehen:

Die ersten beiden Vektoren sind bereits orthogonal und müssen nur noch normiert werden:

$$b_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Ferner berechnet man

$$b_4 = v_4 - \underbrace{(v_4|b_2)}_{=\frac{1}{\sqrt{2}}} b_2 - \underbrace{(v_4|b_3)}_{=\frac{1}{\sqrt{2}}} b_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{und } \|b_4\| = 1.$$

Mit der orthogonalen Matrix

$$T = (b_1, b_2, b_3, b_4) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

und der Diagonalmatrix

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

gilt dann

$$B = TDT^T$$

nach Satz 18.8 der Vorlesung.

(b) Es gilt für alle $k \in \mathbb{N}$:

$$B^k = (TDT^T)^k = T \underbrace{DT^{-1}TDT^{-1} \dots TDT^{-1}}_{=I_4} = TD^kT^T$$

Wegen $D^k = 4^{k-1}D$ folgt:

$$B^k = T4^{k-1}DT^T = 4^{k-1}TDT^T = 4^{k-1}B$$

AUFGABE 21 (ÜBUNG)

Seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B_{\alpha,\beta} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 17 & 16 & 15 \\ 9 & 8 & 7 \\ \beta & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Es existiert genau ein Paar (α, β) , sodass A und $B_{\alpha,\beta}$ ähnlich sind. Finden Sie dieses Paar.

LÖSUNGSVORSCHLAG

Die Spur und die Determinante einer Matrix sind invariant unter einer Ähnlichkeitstransformation. Sind A und B also ähnlich, so haben sie dieselbe Spur und Determinante. Es gilt

$$\text{Spur}(A) = 1 + 4 + 7 = 12, \quad \text{Spur}(B) = \frac{17 + 8 + \alpha}{2} = \frac{25}{2} + \frac{\alpha}{2}.$$

Somit können A und B nur ähnlich sein, wenn $\alpha = -1$ gilt. Zudem gilt

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \cdot (-3) \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array} \cdot (-5) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & -4 & -8 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \cdot (-2) \\ \leftarrow + \end{array} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

sowie

$$\det(B) = \frac{1}{8} \begin{vmatrix} 17 & 16 & 15 \\ 9 & 8 & 7 \\ \beta & 0 & -1 \end{vmatrix} \stackrel{\text{Entw. 3. Z.}}{=} (-1)^{1+3} \cdot \beta \cdot \begin{vmatrix} 16 & 15 \\ 8 & 7 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 17 & 16 \\ 9 & 8 \end{vmatrix} \\ = -8\beta + 8 = 8(1 - \beta),$$

womit $\beta = 1$ gelten muss. Da dies die einzige Möglichkeit ist, sind die Matrizen nach Aufgabenstellung für $\alpha = -1, \beta = 1$ ähnlich.

AUFGABE 22 (TUTORIUM)

Bestimmen Sie die Eigenwerte und zugehörigen Eigenräume von

$$A = \begin{pmatrix} 22 & -2 & -4 \\ 4 & 16 & -4 \\ 2 & -1 & 16 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Welche algebraischen und geometrischen Vielfachheiten haben die Eigenwerte? Welche Matrix ist diagonalisierbar? Ermitteln Sie, falls möglich, reguläre Matrizen S_A bzw. S_B so, sodass $S_A^{-1}AS_A$ bzw. $S_B^{-1}BS_B$ Diagonalgestalt hat.

Mit dem (-1) -Trick folgt, dass

$$E_B(1) = \text{lin}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}.$$

Weiter gilt

$$B - \sqrt{2}I_3 = \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 2 & -\sqrt{2} & 2 \\ -1 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} \leftarrow + \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{matrix}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{2} & 2 - 2\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 2 - \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{matrix} | \cdot (-1) \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{matrix} \xrightarrow{\begin{matrix} \leftarrow + \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 1 & 2 - \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mit dem (-1) -Trick folgt

$$E_B(\sqrt{2}) = \text{lin}\left\{\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 2 - \sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$$

und analog

$$E_B(-\sqrt{2}) = \text{lin}\left\{\begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 2 + \sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix}\right\}.$$

Die geometrischen Vielfachheiten der drei Eigenwerte sind dementsprechend auch 1. Somit stimmen diese mit den algebraischen Vielfachheiten überein und B ist diagonalisierbar. Laut Vorlesung (nach Satz 18.6) erhalten wir eine Matrix S_B , indem wir die Eigenvektoren als Spalten benutzen. S_B ist also beispielsweise gegeben durch

$$S_B = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 0 & 2 - \sqrt{2} & 2 + \sqrt{2} \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Es gilt dann

$$S_B^{-1}BS_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

AUFGABE 23 (ÜBUNG)

Seien $n \in \mathbb{N}$ und $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Man nennt A und B *simultan diagonalisierbar*, falls es eine reguläre Matrix $S \in \mathbb{C}^{n \times n}$ gibt, so dass sowohl $S^{-1}AS$, als auch $S^{-1}BS$ Diagonalgestalt haben. Zeigen Sie:

- Sind A und B simultan diagonalisierbar, so gilt $AB = BA$.
- Gilt $AB = BA$ und haben überdies alle Eigenwerte von A die algebraische Vielfachheit eins, so sind A und B simultan diagonalisierbar.

Hinweis: Man kann ebenfalls zeigen, dass A und B simultan diagonalisierbar sind, falls $AB = BA$ gilt sowie A und B diagonalisierbar sind.

LÖSUNGSVORSCHLAG

- a) Gelte nach Voraussetzung etwa $A = SD_1S^{-1}$ bzw. $B = SD_2S^{-1}$ Diagonalmatrizen $D_1, D_2 \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Es folgt:

$$AB = SD_1 \underbrace{S^{-1}S}_{I_n} D_2 S^{-1} = SD_1 D_2 S^{-1} = SD_2 D_1 S^{-1} = SD_1 \underbrace{S^{-1}S}_{I_n} D_2 S^{-1} = BA$$

- b) Nach Abschnitt 18.3 der Vorlesung gilt für jeden Eigenwert λ von A

$$1 \leq m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda) \leq n,$$

wobei $m_g(\lambda)$ bzw. $m_a(\lambda)$ die geometrische bzw. algebraische Vielfachheit des Eigenwertes bezeichnen. Nach Voraussetzung ist also $m_g(\lambda) = m_a(\lambda) = 1$ für jeden Eigenwert λ von A . Nach Satz 18.8 der Vorlesung ist also A diagonalisierbar. Seien etwa b_1, \dots, b_n linear unabhängige Eigenvektoren zu den Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ von A . Wegen $m_g(\lambda_j) = 1$ für alle $j \in \{1, \dots, n\}$, ist $E_A(\lambda_j) = \text{lin}\{b_j\}$ für alle $j \in \{1, \dots, n\}$.

Mit der Voraussetzung der Vertauschbarkeit folgt

$$ABb_j = BAB_j = \lambda_j Bb_j,$$

also $Bb_j \in E_A(\lambda_j)$ für alle $j \in \{1, \dots, n\}$. Wegen $\dim(E_A(\lambda_j)) = m_g(\lambda_j) = 1$, existiert ein $\mu_j \in \mathbb{C}$ mit $Bb_j = \mu_j b_j$ für alle $j \in \{1, \dots, n\}$. Damit sind die Eigenwerte von B gegeben durch μ_1, \dots, μ_n mit den Eigenvektoren b_1, \dots, b_n . Mit $S = (b_1, \dots, b_n)$ haben sowohl $S^{-1}AS$, als auch $S^{-1}BS$ Diagonalgestalt.

AUFGABE 24 (TUTORIUM)

Sei $n \in \mathbb{N}$. Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch? Begründen Sie ihre Antwort.

- Ist $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A , so ist auch $\bar{\lambda}$ ein Eigenwert von A .
- Ist $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von A , so existiert ein reeller Eigenvektor $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ von A zum Eigenwert λ .
- Sind $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ und ist $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A sowie $\mu \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von B , so ist $\lambda\mu$ ein Eigenwert von AB .
- Ist $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A , so ist λ^2 ein Eigenwert von A^2 .
- Ist $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und n gerade/ungerade, so besitzt A einen reellen Eigenwert.
- Ist $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ unitär und $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A , so gilt $|\lambda| = 1$.

LÖSUNGSVORSCHLAG

- a) Die Aussage ist wahr. Sei $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ . Mit $\bar{x} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ gilt nun

$$A\bar{x} = \overline{Ax} = \overline{\lambda x} = \bar{\lambda}\bar{x},$$

womit \bar{x} ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\bar{\lambda}$ ist. Die erste Gleichheit lässt sich dabei einfach mit der Definition des Matrix-Vektorprodukts und der Tatsache, dass A reelle Einträge hat, nachrechnen.

- b) Die Aussage ist wahr. Sei $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ . Ist $\operatorname{Re} v = 0$, also $v = iw$ für ein $w \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, so ist iv ein reeller Eigenvektor von A zum Eigenwert λ . Ist $\operatorname{Re} v \neq 0$, so ist $\operatorname{Re} v = \frac{v+\bar{v}}{2}$ ein reeller Eigenvektor zum Eigenwert λ , denn nach a) ist neben v auch \bar{v} ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda = \bar{\lambda}$, somit auch $\operatorname{Re} v$ als Linearkombination dieser beiden.
- c) Die Aussage ist falsch. Seien etwa $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Dann haben beide Matrizen das charakteristische Polynom $\lambda(\lambda - 1)$ und somit die Eigenwerte 0 und 1. Ein mögliches Produkt zweier Eigenwerte ist somit 1, was jedoch kein Eigenwert von $AB = 0$ ist.
- d) Sei $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ . Dann gilt

$$A^2v = A(Av) = \lambda Av = \lambda^2v,$$

womit v ebenfalls ein Eigenvektor von A^2 zum Eigenwert λ^2 ist.

- e) Ist n gerade, so ist die Aussage falsch. Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ hat das charakteristische Polynom $\lambda^2 + 1$ und somit nur die nicht-reellen Eigenwerte $\pm i$.
Ist n ungerade, so ist die Aussage wahr, denn das charakteristische Polynom ist reell und hat einen ungeraden Grad. So ein Polynom besitzt mindestens eine reelle Nullstelle.
- f) Die Aussage ist wahr. Für unitäre Matrizen gilt $(Ax|Ax) = (x|x)$. Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A und v ein zugehöriger Eigenvektor. Dann folgt

$$(v|v) = (Av|Av) = (\lambda v|\lambda v) = \lambda \bar{\lambda} (v|v) = |\lambda|^2 (v|v).$$

Wegen $(v|v) = \|v\|^2 \neq 0$ folgt $|\lambda|^2 = 1$ und somit $|\lambda| = 1$.