

HÖHERE MATHEMATIK II FÜR DIE FACHRICHTUNG PHYSIK

5. ÜBUNGSBLATT

AUFGABE 25 (ÜBUNG)

- a) Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Untersuchen Sie die Matrix

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 8 & \alpha \\ 0 & \alpha & 1 \end{pmatrix}$$

auf Definitheit.

- b) Seien $A, B, A_j \subseteq \mathbb{R}^n$ für $j \in I$ (I beliebige Indexmenge). Zeigen Sie:

- (i) Sind A und B offen, so auch $A \cup B$ und $A \cap B$. Ist A offen und B abgeschlossen, so ist auch $A \setminus B$ offen.
- (ii) Sind A und B abgeschlossen, so auch $A \cup B$ und $A \cap B$. Ist A abgeschlossen und B offen, so ist auch $A \setminus B$ abgeschlossen.
- (iii) Sind alle A_j offen, so auch $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j$. Sind alle A_j abgeschlossen, so auch $\bigcap_{j \in \mathbb{N}} A_j$.

AUFGABE 26 (TUTORIUM)

- a) Seien $\beta \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Untersuchen Sie die Matrix

$$B_\beta = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{4}{3} + \frac{\beta}{2} & \frac{4}{3} - \frac{\beta}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{4}{3} - \frac{\beta}{2} & \frac{4}{3} + \frac{\beta}{2} \end{pmatrix}$$

auf Definitheit.

- b) Überprüfen Sie die folgenden Mengen auf Offenheit und Abgeschlossenheit:

- (i) $M_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + 5y^2 < 1\}$
- (ii) $M_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2 + y^2 - 2xy \geq 3) \wedge (y \geq x)\} \cup \{(0, 0)\}$

- c) Geben Sie je ein Beispiel einer stetigen Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ an, sodass

- (i) Das Bild einer (speziellen) offenen Menge $O \subseteq \mathbb{R}^2$ unter f nicht offen ist.
- (ii) Das Bild einer (speziellen) abgeschlossenen Menge $A \subseteq \mathbb{R}^2$ unter f nicht abgeschlossen ist.

AUFGABE 27 (ÜBUNG)

Es sei $m \in \mathbb{N}$. Untersuchen Sie jeweils die angegebene Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ in $0 \in D$ auf Stetigkeit.

- a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definiert durch $f(x) := \begin{cases} \left(x \sin\left(\frac{1}{x}\right), |x|^{x^2}\right), & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ (0, 1), & x = 0. \end{cases}$

- b) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x, y) = \begin{cases} \frac{4xy}{x^2+y^2} \sin(xy^2 - x^2y), & (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$
- c) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definiert durch $f(x, y) := \begin{cases} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right), & \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \\ (0, 0), & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$
- d) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x, y, z) := \begin{cases} \frac{(1-\cos(xy))\sin(x+z)}{x^3}, & (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ mit } x \neq 0, \\ \frac{z}{2}, & (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ mit } x = 0. \end{cases}$

AUFGABE 28 (TUTORIUM)

Die Funktionen f , g und h seien für $(0, 0) \neq (x, y) \in \mathbb{R}^2$ durch

$$f(x, y) := \frac{xy^2}{x^2 + y^2}, \quad g(x, y) := \frac{xy^2}{x^2 + y^4}, \quad h(x, y) := \frac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x - y)^2}$$

gegeben und $f(0, 0) := g(0, 0) := h(0, 0) := 0$. Zeigen Sie:

- Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig.
- Die Funktion g ist in $(0, 0)$ nicht stetig, aber g ist im Nullpunkt *längs jeder Geraden stetig*: Für jedes feste $\varphi \in \mathbb{R}$ gilt $g(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)) \rightarrow g(0, 0)$ für $r \rightarrow 0+$.
- Die Funktion h ist in $(0, 0)$ nicht stetig, aber die Grenzwerte

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} h(x, y) \quad \text{und} \quad \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} h(x, y)$$

existieren und stimmen mit $h(0, 0)$ überein.

AUFGABE 29 (ÜBUNG)

Es sei $D := U_1((0, 0)) \setminus \{(0, 0)\} \subset \mathbb{R}^2$. Untersuchen Sie jeweils für die angegebene Funktion f ob der Grenzwert $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$ existiert und bestimmen Sie diesen gegebenenfalls.

- $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x, y) := \frac{\sin(x^3y)}{e^{y^2} \cos(xy)}$,
- $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x, y) := \frac{x^{k-1}y^{k+3} + x^k y^{k+2}}{6x^{2k+2} + 4y^{2k+2}}$ für ein $k \in \mathbb{N}$,
- $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x, y) := (1 - e|x + y|)^{x/(x^2+y^2)}$.

AUFGABE 30 (TUTORIUM)

Untersuchen Sie die folgenden Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ auf Stetigkeit.

- $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) := \begin{cases} \frac{2x^2y^3}{x^8+y^4}, & (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$
- $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) := \begin{cases} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}, & (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \\ 2, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$
- $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) := \begin{cases} (1 + |xy|)^{\frac{1}{x^2+y^2}}, & (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \\ 1, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$