Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Sebastian Schwarz

SS 2019
23.05.2019

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 5. Übungsblatt

Aufgabe 25 (Übung)

a) Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Untersuchen Sie die Matrix

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 8 & \alpha \\ 0 & \alpha & 1 \end{pmatrix}$$

auf Definitheit.

b) Seien $A, B, A_j \subseteq \mathbb{R}^n$ für $j \in I$ (I belieblige Indexmenge). Zeigen Sie:

(i) Sind A und B offen, so auch $A \cup B$ und $A \cap B$. Ist A offen und B abgeschlossen, so ist auch $A \setminus B$ offen.

(ii) Sind A und B abgeschlossen, so auch $A \cup B$ und $A \cap B$. Ist A abgeschlossen und B offen, so ist auch $A \setminus B$ abgeschlossen.

(iii) Sind alle A_j offen, so auch $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j$. Sind alle A_j abgeschlossen, so auch $\bigcap_{j\in\mathbb{N}} A_j$.

Lösungsvorschlag

a) Wir versuchen die Eigenwerte der Matrix A_α abzuschätzen. Für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\begin{aligned} p_{A_\alpha}(\lambda) &= \det(A_\alpha - I_3\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 8-\lambda & \alpha \\ 0 & \alpha & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &\overset{\text{Sarrus}}{=} (1-\lambda)(8-\lambda)(1-\lambda) - 4(1-\lambda) - \alpha^2(1-\lambda) \\ &= (1-\lambda)((8-\lambda)(1-\lambda) - (4+\alpha^2)) \\ &= (1-\lambda)(\lambda^2 - 9\lambda + 4 - \alpha^2) \end{aligned}$$

Daraus lesen wir ab, dass $\lambda_1 = 1$ ein Eigenwert von A_α ist für alle $\alpha \in \mathbb{R}$. Also ist A_α, nach der Charakterisierung im Abschnitt 18.12 der Vorlesung, nie negativ (semi-) definit. Die zwei anderen Eigenwerte von A_α sind die Nullstellen des Polynoms $\lambda^2 - 9\lambda + 4 - \alpha^2$ und somit gegeben durch

$$\lambda_2 = \frac{9 + \sqrt{81 - 4(4-\alpha^2)}}{2} \qquad \lambda_3 = \frac{9 - \sqrt{81 - 4(4-\alpha^2)}}{2}$$

Wegen $\lambda_2 > 0$ bestimmt nur das Vorzeichen von λ_3 die Definitheit von A_α. Ablesen liefert: ist $|\alpha| < 2$, so ist $\lambda_3 > 0$ und damit A_α positiv definit. Ist $|\alpha| = 2$, so ist $\lambda_3 = 0$ und damit A_α positiv semidefinit. Ist schließlich $|\alpha| > 2$, so ist $\lambda_3 < 0$ und damit A_α indefinit.

b) (i) Seien zunächst A und B offen sowie $x_0 \in A \cup B$. Dann ist $x_0 \in A$ oder $x_0 \in B$ und da beide Mengen offen sind, existiert ein $r > 0$ mit $U_r(x_0) \subseteq A \subseteq A \cup B$ oder $U_r(x_0) \subseteq B \subseteq A \cup B$,

womit $A \cup B$ offen ist.
Seien nun A und B offen sowie $x_0 \in A \cap B$. Dann gilt $x_0 \in A$ und $x_0 \in B$, womit $r_1, r_2 > 0$ existieren mit $U_{r_1}(x_0) \subseteq A$ und $U_{r_2}(x_0) \subseteq B$. Mit $r := \min\{r_1, r_2\}$ gilt also $U_r(x_0) \subseteq A \cap B$, womit $A \cap B$ offen ist.
Sei nun A offen und B abgeschlossen. Dann ist per Definition $B^C := \mathbb{R}^n \setminus \{B\}$ offen. Nach HM 1 gilt

$$A \setminus B = A \cap B^C$$

und da wir eben bereits gezeigt haben, dass der Schnitt zweier offener Mengen offen ist, gilt dies insbesondere für $A \setminus B$.

(ii) Seien zunächst A und B abgeschlossen. Um zu zeigen, dass $A \cup B$ abgeschlossen ist, zeigen wir, dass $(A \cup B)^C$, das nach den DeMorganschen Regeln mit $A^C \cap B^C$ übereinstimmt, offen ist. Da A^C und B^C offen sind, folgt dies aus **a)**. Um die Abgeschlossenheit von $A \cap B$ zu zeigen, weisen wir die Offenheit von $(A \cap B)^C$ nach, das mit $A^C \cup B^C$ übereinstimmt. Die Offenheit davon folgt wieder mit **a)**.
Sei nun A abgeschlossen und B offen. Es gilt

$$A \setminus B = A \cap B^C$$

und letztere Menge ist nach dem bereits gezeigten abgeschlossen, da A und B^C abgeschlossen sind.

(iii) Seien alle A_j offen und $x_0 \in \bigcup_{j \in I} A_j$. Somit ist $x_0 \in A_{j_0}$ für mindestens ein $j_0 \in I$, womit ein $r > 0$ existiert mit $U_r(x_0) \subseteq A_{j_0} \subseteq \bigcup_{j \in I} A_j$. Damit ist $\bigcup_{j \in I} A_j$ offen.
Seien nun alle A_j abgeschlossen. Es gilt für $x \in \mathbb{R}^n$

$$x \in (\bigcap_{j \in I} A_j)^C \Leftrightarrow x \notin \bigcap_{j \in I} A_j \Leftrightarrow \exists j \in I : x \notin A_j \Leftrightarrow \exists j \in I : x \in A_j^C \Leftrightarrow x \in \bigcup_{j \in I} A_j^C.$$

Somit gilt $(\bigcap_{j \in I} A_j)^C = \bigcup_{j \in I} A_j^C$, was nach dem obigen Ergebnis eine offene Menge ist, da alle A_j^C offen sind. Also ist $\bigcap_{j \in I} A_j$ per Definition abgeschlossen.

Aufgabe 26 (Tutorium)

a) Seien $\beta \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Untersuchen Sie die Matrix

$$B_\beta = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{4}{3} + \frac{\beta}{2} & \frac{4}{3} - \frac{\beta}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{4}{3} - \frac{\beta}{2} & \frac{4}{3} + \frac{\beta}{2} \end{pmatrix}$$

auf Definitheit.

b) Überprüfen Sie die folgenden Mengen auf Offenheit und Abgeschlossenheit:

(i) $M_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + 5y^2 < 1\right\}$

(ii) $M_2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2 + y^2 - 2xy \geq 3) \wedge (y \geq x)\right\} \cup \{(0, 0)\}$

c) Geben Sie je ein Beispiel einer stetigen Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ an, sodass

(i) Das Bild einer (speziellen) offenen Menge $O \subseteq \mathbb{R}^2$ unter f nicht offen ist.

(ii) Das Bild einer (speziellen) abgeschlossenen Menge $A \subseteq \mathbb{R}^2$ unter f nicht abgeschlossen ist.

Lösungsvorschlag

a) Wir bestimmen die Eigenwerte der Matrix B_β. Für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt:

$$
\begin{aligned}
\chi_{B_\beta}(\lambda) &= \det(B_\beta - I_3\lambda) = \begin{vmatrix} \frac{7}{3}-\lambda & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{4}{3}+\frac{\beta}{2}-\lambda & \frac{4}{3}-\frac{\beta}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{4}{3}-\frac{\beta}{2} & \frac{4}{3}+\frac{\beta}{2}-\lambda \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \frac{7}{3}-\lambda & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{4}{3}+\frac{\beta}{2}-\lambda & \frac{4}{3}-\frac{\beta}{2} \\ 0 & -\beta+\lambda & \beta-\lambda \end{vmatrix} \overset{(D2)}{=} (\beta-\lambda)\begin{vmatrix} \frac{7}{3}-\lambda & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{4}{3}+\frac{\beta}{2}-\lambda & \frac{4}{3}-\frac{\beta}{2} \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= (\beta-\lambda)\begin{vmatrix} \frac{7}{3}-\lambda & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{8}{3}-\lambda & \frac{4}{3}-\frac{\beta}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \underset{\text{3-ten Zeile}}{\overset{\text{Entw. nach}}{=}} (\beta-\lambda)\begin{vmatrix} \frac{7}{3}-\lambda & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{8}{3}-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (\beta-\lambda)\begin{vmatrix} \frac{7}{3}-\lambda & \frac{2}{3} \\ -2+\lambda & 2-\lambda \end{vmatrix} = (\beta-\lambda)(2-\lambda)\begin{vmatrix} \frac{7}{3}-\lambda & \frac{2}{3} \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= (\beta-\lambda)(2-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \underset{\text{2-ten Zeile}}{\overset{\text{Entw. nach}}{=}} (\beta-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda)
\end{aligned}
$$

Also ist sind die Eigenwerte von B gegeben durch $\beta, 2$ und 3. Nach der Charakterisierung der Definitheit im Abschnitt 18.9 der Vorlesung, ist B_β indefinit für $\beta < 0$, positiv semidefinit für $\beta = 0$ und positiv definit für $\beta > 0$.

b) (i) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y) = x^2 + 5y^2$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Dann ist f stetig auf $\mathbb{R}^2$ und es gilt

$$M_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < f(x,y) < 1\right\} = f^{-1}((0,1)).$$

Nach Satz 19.4 ist also M_1 als stetiges Urbild einer offenen Menge wieder offen.

Betrachte $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} = ((\frac{1}{2k}, 0))_{k\in\mathbb{N}}$. Dann ist $(\frac{1}{2k}, 0) \in M_1$ für alle $k \in \mathbb{N}$, aber $\lim_{k\to\infty} a_k = 0 \notin M_1$. Also ist M_1 nicht abgeschlossen, nach der Charakterisierung abgeschlossener Mengen aus dem Abschnitt 19.2 der Vorlesung.

(ii) Seien $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2 + y^2 - 2xy \geqslant 3) \wedge (y \geqslant x)\right\}$ und $B = \{(0,0)\}$. Dann ist $M_2 = A \cup B$. Die Menge B ist offensichtlich abgeschlossen. Wir zeigen, dass A abgeschlossen ist. Dann ist nach Aufgabenteil **a)** auch M_2 abgeschlossen:

Sei dazu $(x_k, y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine gegen $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ konvergente Folge mit $(x_k, y_k) \in A$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Somit gilt für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist $x_k^2 + y_k^2 - 2x_k y_k \geqslant 3$ und $y_k \geqslant x_k$. Wegen der Monotonie der Grenzwerte folgt damit aber auch, dass $\lim_{k\to\infty} x_k^2 + y_k^2 - 2x_k y_k = x_0^2 + y_0^2 - 2x_0 y_0 \geqslant 3$ und $\lim_{k\to\infty} y_k = y_0 \geq x_0 = \lim_{k\to\infty} x_k$. Also in der Tat $(x_0, y_0) \in A$.

Es ist $a_k := (\frac{1}{k}, 0) \in (A \cup B)^C = M_2^C$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Ferner ist $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$. Aber, wegen $0 \in M_2$, ist $0 \notin M_2^C$. Damit ist M_2^C nicht abgeschlossen und per Definition M_2 nicht offen.

c) (i) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $f(x,y) = 0$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Dann ist das Bild jeder offenen Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ (zum Beispiel $\mathbb{R}^2$ selbst) gerade $\{0\}$, also nicht offen.
Alternativ sei $f(x,y) = (\sin(x), \cos(y))$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Dann ist das Bild der offenen Menge $\mathbb{R}^2$ (oder auch $(-2\pi, 2\pi)^2$) unter f gerade $[-1,1]^2$, also nicht offen.

(ii) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $f(x,y) = (e^x, e^y)$. Dann ist das Bild der abgeschlossenen Menge $\mathbb{R}^2$ gerade $(0,\infty)^2$, also nicht abgeschlossen.

Aufgabe 27 (Übung)

Es sei $m \in \mathbb{N}$. Untersuchen Sie jeweils die angegebene Funktion $f : D \to \mathbb{R}^m$ in $0 \in D$ auf Stetigkeit.

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $f(x) := \begin{cases} \left(x \sin\left(\frac{1}{x}\right), |x|^{x^2}\right), & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ (0,1), & x = 0. \end{cases}$

b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y) = \begin{cases} \frac{4xy}{x^2+y^2} \sin(xy^2 - x^2y), & (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$

c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $f(x,y) := \begin{cases} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), & \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \\ (0,0), & (x,y) = (0,0). \end{cases}$

d) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y,z) := \begin{cases} \frac{(1-\cos(xy))\sin(x+z)}{x^3}, & (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ mit } x \neq 0, \\ \frac{z}{2}, & (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ mit } x = 0. \end{cases}$

Lösungsvorschlag

a) *Voraussetzung:* Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $f(x) := \begin{cases} \left(x \sin\left(\frac{1}{x}\right), |x|^{x^2}\right), & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ (0,1), & x = 0. \end{cases}$

Behauptung: f ist stetig in 0.
Beweis: Es gilt

$$\left| x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leqslant |x| \xrightarrow{x \to 0} 0$$

und $|x|^{x^2} = e^{x^2 \log(|x|)} \xrightarrow{x\to 0} 1$ wegen

$$\lim_{x\to 0} x^2 \log(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\log(x)}{x^{-2}} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{x^{-1}}{-2x^{-3}} = \lim_{x\to 0} -\frac{x^2}{2} = 0.$$

Somit sind beide Komponenten der Funktion stetig in 0 (außerhalb von 0 ist dies klar). Damit ist f laut Vorlesung stetig in 0.

b) Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y) = \begin{cases} \frac{4xy}{x^2+y^2} \sin(xy^2 - x^2y), & (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Behauptung: f ist in $(0,0)$ stetig.
Beweis: Es gilt wegen $(x \pm y)^2 \geqslant 0$, dass $\mp 2xy \leqslant x^2 + y^2$ und somit $|2xy| \leqslant x^2 + y^2$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Deshalb folgt für $(x,y) \neq (0,0)$

$$|f(x,y)| \leqslant \frac{2(x^2+y^2)}{x^2+y^2} |\sin(xy^2 - x^2y)| = 2|\sin(xy^2 - x^2y)| \xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} 0,$$

also

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$$

Somit folgt, dass f in $(0,0)$ stetig ist.

c) *Voraussetzung:* Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $f(x,y) := \begin{cases} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), & \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ (0,0), & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$

Behauptung: f ist nicht stetig in $(0,0)$.

Beweis: Für $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$ gilt

$$\|f(x,y) - f(0,0)\| = 1$$

und damit ist f in $(0,0)$ nicht stetig.

d) *Voraussetzung:* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{(1-\cos(xy))\sin(x+z)}{x^3}, & (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ mit } x \neq 0 \\ \frac{z}{2}, & (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ mit } x = 0 \end{cases}$.

Behauptung: f ist in $(0,0,0)$ nicht stetig.
Beweis: Es gilt, dass

$$\mathbb{R}^3 = \underbrace{\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x \neq 0\}}_{=:D_1} \ \dot{\cup} \ \underbrace{\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x = 0\}}_{=:D_2}.$$

Wir setzen $v^0 := (0,0,0)$. Wir zeigen, dass f in v^0 nicht stetig ist. v^0 ist ohne Zweifel ein Häufungspunkt von $\mathbb{R}^3$ und es gilt $f(v^0) = 0$. Für $(v^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $v^{(k)} := (\frac{1}{k^3}, \frac{1}{k}, \frac{1}{k})$ gilt $v^{(k)} \in D_1$ für $k \in \mathbb{N}$ und $v^{(k)} \xrightarrow{k\to\infty} v^0$. Aber für $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$f(v^{(k)}) = \frac{(1-\cos(\frac{1}{k^4}))\sin(\frac{1}{k^3} + \frac{1}{k})}{\frac{1}{k^9}} = \frac{(1-\cos(\frac{1}{k^4}))}{\frac{1}{k^8}} \cdot \frac{\sin(\frac{1}{k^3} + \frac{1}{k})}{\frac{1}{k}} \xrightarrow{k\to\infty} \frac{1}{2} \neq 0 = f(v^0).$$

Dies gilt wegen

$$\frac{1-\cos(x)}{x^2} \xrightarrow{x\to 0} \frac{1}{2} \qquad \text{und} \qquad \frac{\sin(x^3+x)}{x} \xrightarrow{x\to 0} 1,$$

was beides mittels der Regel von L'Hospital eingesehen werden kann. Alternativ betrachtet man im ersten Fall die Potenzreihe des Kosinus und schreibt den zweiten Bruch um als $\frac{\sin(x^3+x)}{x^3+x} \cdot \frac{x^3+x}{x} = \frac{\sin(x^3+x)}{x^3+x} \cdot (x^2+1)$.

Aufgabe 28 (Tutorium)

Die Funktionen f, g und h seien für $(0,0) \neq (x,y) \in \mathbb{R}^2$ durch

$$f(x,y) := \frac{xy^2}{x^2+y^2}, \qquad g(x,y) := \frac{xy^2}{x^2+y^4}, \qquad h(x,y) := \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$$

gegeben und $f(0,0) := g(0,0) := h(0,0) := 0$. Zeigen Sie:

a) Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist stetig.

b) Die Funktion g ist in $(0,0)$ nicht stetig, aber g ist im Nullpunkt *längs jeder Geraden stetig*: Für jedes feste $\varphi \in \mathbb{R}$ gilt $g(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)) \to g(0,0)$ für $r \to 0+$.

c) Die Funktion h ist in $(0,0)$ nicht stetig, aber die Grenzwerte

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} h(x,y) \quad \text{und} \quad \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} h(x,y)$$

existieren und stimmen mit $h(0,0)$ überein.

Lösungsvorschlag

a) Klar: f ist stetig in jedem $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ als Komposition stetiger Funktionen.

Sei $(x_k, y_k)_{k\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^2)^{\mathbb{N}}$ mit $\lim_{k\to\infty}(x_k, y_k) \to (0,0)$ und $(x_k, y_k) \neq (0,0)$ für alle $k \in \mathbb{N}$ beliebig. Dann gilt wegen $(x-y)^2 \geqslant 0$, dass $2xy \leqslant x^2 + y^2$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Es folgt

$$|f(x_k, y_k)| = |\frac{x_k y_k^2}{x_k^2 + y_k^2}| \leqslant |y_k| \frac{x_k^2 + y_k^2}{2(x_k^2 + y_k^2)} = \frac{|y_k|}{2} \to 0 = f(0,0)$$

für $k \to \infty$. Damit ist f stetig in $(0,0)$.

b) Die Funktion g ist unstetig in $(0,0)$, denn $(\frac{1}{k^2}, \frac{1}{k}) \to (0,0)$ für $k \to \infty$, aber

$$g\left(\frac{1}{k^2}, \frac{1}{k}\right) = \frac{\frac{1}{k^4}}{\frac{1}{k^4} + \frac{1}{k^4}} = \frac{1}{2} \not\to 0 = g(0,0)$$

für $k \to \infty$.

Sei $\varphi \in \mathbb{R}$ beliebig. Angenommen, $\cos(\varphi) = 0$. Dann ist $\sin(\varphi) \neq 0$ und

$$g(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)) = \frac{r^3 \cos(\varphi)\sin^2(\varphi)}{r^2\cos^2(\varphi) + r^4 \sin^4(\varphi)} = 0 \to 0 = g(0,0)$$

für $r \to 0+$. Ist $\cos(\varphi) \neq 0$, so ist trotzdem

$$g(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)) = \frac{r^3 \cos(\varphi)\sin^2(\varphi)}{r^2\cos^2(\varphi) + r^4 \sin^4(\varphi)} = r\frac{\cos(\varphi)\sin^2(\varphi)}{\cos^2(\varphi) + r^2 \sin^4(\varphi)} \to 0 = g(0,0)$$

für $r \to 0+$.

c) Die Funktion h ist unstetig in $(0,0)$, denn $(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}) \to (0,0)$ für $k \to \infty$, aber

$$h\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right) = \frac{\frac{1}{k^4}}{\frac{1}{k^4}} = 1 \not\to 0 = h(0,0)$$

für $k \to \infty$.

Sei $x \neq 0$. Dann gilt

$$h(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2} \to \frac{0}{0 + \underbrace{(x-0)^2}_{>0}} = 0$$

für $y \to 0$. Ist $x = 0$, so ist $h(x,y) = 0 \to 0$ für $y \to 0$. Also gilt in der Tat $\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} h(x,y) = h(0,0) = 0$. Wegen $h(x,y) = h(y,x)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt auch $\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} h(x,y) = h(0,0) = 0$.

Aufgabe 29 (Übung)

Es sei $D := U_1((0,0)) \setminus \{(0,0)\} \subset \mathbb{R}^2$. Untersuchen Sie jeweils für die angegebene Funktion f ob der Grenzwert $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ existiert und bestimmen Sie diesen gegebenenfalls.

a) $f : D \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y) := \frac{\sin(x^3y)}{e^{y^2}\cos(xy)}$,

b) $f : D \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y) := \frac{x^{k-1}y^{k+3} + x^k y^{k+2}}{6x^{2k+2} + 4y^{2k+2}}$ für ein $k \in \mathbb{N}$,

c) $f : D \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y) := (1 - e|x+y|)^{x/(x^2+y^2)}$.

LÖSUNGSVORSCHLAG

Es sei $D := U_1((0,0)) \setminus \{(0,0)\} \subset \mathbb{R}^2$.

a) *Voraussetzung:* Sei $f : D \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y) := \frac{\sin(x^3 y)}{e^{y^2}\cos(xy)}$.
Behauptung: Es gilt $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.
Beweis: Sei $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in D mit $w_n \to (0,0)$ für $n \to \infty$, das heißt $x_n \to 0$ und $y_n \to 0$ für $n \to \infty$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$f(w_n) = f(x_n, y_n) = \frac{\sin(x_n^3 y_n)}{e^{y_n^2}\cos(x_n y_n)}.$$

Ferner haben wir

$$\lim_{n\to\infty} e^{y_n^2} = 1 = \lim_{n\to\infty} \cos(x_n y_n).$$

Aus der Stetigkeit des Sinus und $\sin 0 = 0$ folgt damit insgesamt

$$|f(w_n)| \to 0$$

für $n \to \infty$. Somit existiert $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

b) *Voraussetzung:* Sei $f : D \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y) := \frac{x^{k-1}y^{k+3}+x^k y^{k+2}}{6x^{2k+2}+4y^{2k+2}}$ mit $k \in \mathbb{N}$.
Behauptung: Es existiert $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ nicht.
Beweis: Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{2\left(\frac{1}{n}\right)^{2k+2}}{6\left(\frac{1}{n}\right)^{2k+2} + 4\left(\frac{1}{n}\right)^{2k+2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{5} = \frac{1}{5}.$$

Für jedes $x \in \mathbb{R}$ und $y = -x$ gilt für jedes $k \in \mathbb{N}$

$$x^{k-1}y^{k+3} + x^k y^{k+2} = (-1)^{k+3}x^{2k+2} + (-1)^{k+2}x^{2k+2} = 0,$$

denn $k+2$ ist genau dann gerade, wenn $k+3$ ungerade ist. Folglich ist

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}, -\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0.$$

Wegen $(1/n, 1/n) \to (0,0)$ und $(1/n, -1/n) \to (0,0)$ für $n \to \infty$ und $\frac{1}{5} \neq 0$, existiert daher $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ nicht.

c) *Voraussetzung:* Sei $f : D \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y) := (1 - e|x+y|)^{x/(x^2+y^2)}$.
Behauptung: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ existiert nicht.
Beweis: Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{2e}{n}\right)^{\frac{n}{2}} \to e^{-e}$$

und

$$\lim_{n\to\infty} f\left(-\frac{1}{n}, -\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{2e}{n}\right)^{-\frac{n}{2}} \to e^{e}.$$

Wegen $(1/n, 1/n) \to (0,0)$ und $(-1/n, -1/n) \to (0,0)$ für $n \to \infty$ und $e^e \neq e^{-e}$ existiert daher $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ nicht.

Aufgabe 30 (Tutorium)

Untersuchen Sie die folgenden Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ auf Stetigkeit.

a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) := \begin{cases} \frac{2x^2y^3}{x^8+y^4}, & (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$

b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) := \begin{cases} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}, & (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \\ 2, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$

c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) := \begin{cases} (1+|xy|)^{\frac{1}{x^2+y^2}}, & (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \\ 1, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Lösungsvorschlag

a) *Voraussetzung:* Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{2x^2y^3}{x^8+y^4}, & (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Behauptung: f ist nicht stetig in $(0,0)$.
Beweis: Wir betrachten die Folge $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^2$ mit $w_n := (1/n, 1/n^2)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es gilt $w_n \to (0,0)$ für $n \to \infty$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ haben wir

$$f(w_n) = \frac{2 \cdot 1/n^2 \cdot \left(1/n^2\right)^3}{1/n^8 + \left(1/n^2\right)^4} = 1 \to 1 \neq 0 = f(0,0)$$

für $n \to \infty$. Somit ist f nicht stetig in $(0,0)$.

b) *Voraussetzung:* Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 2, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Behauptung: f ist stetig in $(0,0)$.
Beweis: Für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ gilt

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1} \cdot \frac{\sqrt{x^2+y^2+1}+1}{\sqrt{x^2+y^2+1}+1} = \frac{(x^2+y^2)\left(\sqrt{x^2+y^2+1}+1\right)}{(x^2+y^2+1)-1} \\ &= \sqrt{x^2+y^2+1}+1. \end{aligned}$$

Somit haben wir für $(x,y) \neq (0,0)$

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2+1}+1 \to \sqrt{0^2+0^2+1}+1 = 2 = f(0,0)$$

für $(x,y) \to (0,0)$, das heißt f ist stetig in $(0,0)$.

c) *Voraussetzung:* Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) := \begin{cases} (1 + |xy|)^{\frac{1}{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 1, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Behauptung: f ist nicht stetig in $(0,0)$.
Beweis: Für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt

$$f(x,x) = (1+x^2)^{\frac{1}{2x^2}} = \exp\left(\frac{1}{2x^2}\ln(1+x^2)\right) = \exp\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}\right).$$

Mit der Regel von L'Hospital sieht man $\frac{\ln(1+t)}{t} \to 1$ für $t \to 0$. Ferner gilt $x^2 \to 0$ für $x \to 0$. Wegen $(x,x) \to (0,0)$ für $x \to 0$ und weil die Exponentialfunktion stetig ist, haben wir damit

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} f(x,x) = \lim_{x \to 0} \exp\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}\right) &\overset{x^2=t}{=} \lim_{t \to 0} \exp\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\ln(1+t)}{t}\right) \\ &= \exp\left(\frac{1}{2} \cdot 1\right) = \sqrt{e} \neq 1 = f(0,0). \end{aligned}$$

Also ist f nicht stetig in $(0,0)$.