

HÖHERE MATHEMATIK II FÜR DIE FACHRICHTUNG PHYSIK

6. ÜBUNGSBLATT

AUFGABE 31 (ÜBUNG)

- a) Die Kurve $\gamma : [-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}] \rightarrow \mathbb{R}^3$ sei durch

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \arcsin(t) \\ t \\ \sqrt{1-t^2} \end{pmatrix} \quad \forall t \in (-1, 1)$$

gegeben. Ist γ eine reguläre Kurve? Bestimmen Sie ihre Länge $L(\gamma)$ und natürliche Parameterisierung.

- b) Seien $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} \|x\|^k & , x \neq 0, \\ 0 & , x = 0. \end{cases}$$

Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}^n$ in denen f (partiell) differenzierbar ist und geben Sie, wenn möglich, ∇f an.

AUFGABE 32 (TUTORIUM)

- a) Die Kurve $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ sei durch

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ \frac{2t}{\pi} \end{pmatrix} \quad \forall t \in [0, 2\pi]$$

gegeben. Ist γ eine reguläre Kurve? Bestimmen Sie ihre Länge $L(\gamma)$ und natürliche Parameterisierung.

- b) Sei $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y, z) := \begin{cases} \frac{x^2 y^2 z}{x^4 + y^4 + z^4}, & (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}, \\ 0, & (x, y, z) = (0, 0, 0). \end{cases}$$

Bestimmen Sie alle $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ in denen f (partiell) differenzierbar ist.

AUFGABE 33 (ÜBUNG)

Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^4}, & (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass in $(0,0)$ alle Richtungsableitungen von f existieren, aber f dort nicht differenzierbar ist.

AUFGABE 34 (TUTORIUM)

Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} \|x\|^2 \sin\left(\frac{1}{\|x\|}\right), & x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f differenzierbar ist, aber nicht stetig partiell differenzierbar.

AUFGABE 35 (ÜBUNG)

Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, welche durch

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^3 - x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ gegeben ist.

- Zeigen Sie, dass f auf $\mathbb{R}^2$ stetig ist.
- Berechnen Sie für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ alle partiellen Ableitungen von f .
- Sind die partiellen Ableitungen von f im Punkt $(0, 0)$ stetig?
- Bestimmen Sie die Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial v}(0, 0)$ für jede Richtung v , für die das möglich ist. Für welche v gilt $\frac{\partial f}{\partial v}(0, 0) = (\nabla f(0, 0)) \cdot v$?

AUFGABE 36 (TUTORIUM)

Betrachten Sie die Funktion $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, welche durch

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ gegeben ist.

- Zeigen Sie, dass g auf $\mathbb{R}^2$ stetig ist.
- Berechnen Sie für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ alle partiellen Ableitungen von g .
- Sind die partiellen Ableitungen von g im Punkt $(0, 0)$ stetig?
- Bestimmen Sie die Richtungsableitung $\frac{\partial g}{\partial v}(0, 0)$ für jede Richtung v , für die das möglich ist. Für welche v gilt $\frac{\partial g}{\partial v}(0, 0) = (\nabla g(0, 0)) \cdot v$?