

HÖHERE MATHEMATIK II FÜR DIE FACHRICHTUNG PHYSIK

LÖSUNGSVORSCHLÄGE ZUM 6. ÜBUNGSBLATT

AUFGABE 31 (ÜBUNG)

a) Die Kurve $\gamma : [-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}] \rightarrow \mathbb{R}^3$ sei durch

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \arcsin(t) \\ t \\ \sqrt{1-t^2} \end{pmatrix} \quad \forall t \in (-1, 1)$$

gegeben. Ist γ eine reguläre Kurve? Bestimmen Sie ihre Länge $L(\gamma)$ und natürliche Parameterisierung.

b) Seien $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} \|x\|^k & , x \neq 0, \\ 0 & , x = 0. \end{cases}$$

Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}^n$ in denen f (partiell) differenzierbar ist und geben Sie, wenn möglich, ∇f an.

LÖSUNGSVORSCHLAG

a) Es gilt

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \\ 1 \\ -\frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \|\gamma'(t)\| = \sqrt{\frac{1}{1-t^2} + 1 + \frac{t^2}{1-t^2}} = \sqrt{2} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \neq 0$$

für alle $t \in [-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}]$. Deshalb ist γ regulär. Ferner gilt:

$$s(t) := \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^t \|\gamma'(\tau)\| d\tau = \sqrt{2}(\arcsin(t) - \arcsin(-1/\sqrt{2})) = \sqrt{2}(\arcsin(t) + \pi/4)$$

für alle $t \in [-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}]$. Es ist also $L(\gamma) = s(1/\sqrt{2}) = \pi/\sqrt{2}$. Die Umkehrfunktion $s^{-1} : [0, \pi/\sqrt{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ ist durch

$$s^{-1}(t) = \sin\left(\frac{t}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4}\right)$$

für alle $t \in [0, \pi/\sqrt{2}]$ gegeben. Die natürliche Parameterisierung von γ ist dann durch

$$\gamma \circ s^{-1}(t) = \gamma\left(\sin\left(\frac{t}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4}\right)\right) = \begin{pmatrix} \frac{t}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4} \\ \sin\left(\frac{t}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4}\right) \\ \cos\left(\frac{t}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4}\right) \end{pmatrix}$$

für alle $t \in [0, \pi/\sqrt{2}]$ gegeben.

b) Für $x \neq 0$ gilt

$$f(x) = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{\frac{k}{2}},$$

womit f dort partiell differenzierbar ist mit

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = 2x_j \frac{k}{2} (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{\frac{k}{2}-1} = kx_j \|x\|^{k-2} \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}.$$

In $x = 0$ gilt für $t \neq 0$

$$\frac{f(0 + te_j) - f(0)}{t} = \frac{|t|^k}{t}.$$

Somit existiert $\frac{\partial f}{\partial x_j}(0)$ für $k \leq 1$ nicht (für $k < 1$ strebt der Ausdruck dem Betrage nach gegen unendlich, für $k = 1$ ergeben sich unterschiedliche einseitige Grenzwerte ± 1). Folglich ist f für $k \leq 1$ auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ (partiell) differenzierbar, da alle partiellen Ableitungen existieren und stetig sind. In 0 existiert keine partielle Ableitung, womit f nicht (partiell) differenzierbar ist.

Für $k > 1$ existiert der obige Grenzwert für $t \rightarrow 0$ und liefert $\frac{\partial f}{\partial x_j}(0) = 0$.

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \right| = |k| |x_j| \|x\|^{k-2} \leq |k| \|x\| \|x\|^{k-2} = |k| \|x\|^{k-1} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0,$$

womit alle partiellen Ableitungen auf ganz \mathbb{R}^n existieren und stetig sind. In diesem Fall ist f also auf ganz \mathbb{R}^n (partiell) differenzierbar. Die Ableitung von f ist gegeben durch

$$(\nabla f)(x) = \begin{cases} k \|x\|^{k-2} x & , x \neq 0, \\ 0 & , x = 0 \quad (\text{für } k > 1). \end{cases}$$

AUFGABE 32 (TUTORIUM)

a) Die Kurve $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ sei durch

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ \frac{2t}{\pi} \end{pmatrix} \quad \forall t \in [0, 2\pi]$$

gegeben. Ist γ eine reguläre Kurve? Bestimmen Sie ihre Länge $L(\gamma)$ und natürliche Parameterisierung.

b) Sei $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y, z) := \begin{cases} \frac{x^2 y^2 z}{x^4 + y^4 + z^4}, & (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}, \\ 0, & (x, y, z) = (0, 0, 0). \end{cases}$$

Bestimmen Sie alle $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ in denen f (partiell) differenzierbar ist.

LÖSUNGSVORSCHLAG

a) Es gilt

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ \frac{2}{\pi} \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \|\gamma'(t)\| = \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t) + \frac{4}{\pi^2}} = \sqrt{1 + \frac{4}{\pi^2}} \neq 0$$

für alle $t \in [0, 2\pi]$. Deshalb ist γ regulär. Ferner gilt:

$$s(t) := \int_0^t \|\gamma'(\tau)\| \, d\tau = \sqrt{1 + \frac{4}{\pi^2}} t$$

für alle $t \in [0, 2\pi]$. Es ist also $L(\gamma) = s(2\pi) = 2\sqrt{\pi^2 + 4}$. Die natürliche Parameterisierung von γ ist durch

$$\gamma \circ s^{-1}(t) = \gamma\left(\frac{\pi}{\sqrt{4 + \pi^2}} t\right) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{\sqrt{4 + \pi^2}} t\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{4 + \pi^2}} t\right) \\ \frac{2}{\sqrt{4 + \pi^2}} t \end{pmatrix}$$

für alle $t \in [0, 2\sqrt{\pi^2 + 4}]$ gegeben.

b) *Behauptung:* f ist partiell differenzierbar auf \mathbb{R}^3 und differenzierbar auf $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$.

Beweis: Sei $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$. Nach den Ableitungsregeln für skalarwertige Funktionen gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) &= \frac{2xy^2z(x^4 + y^4 + z^4) - 4x^5y^2z}{(x^4 + y^4 + z^4)^2}, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) &= \frac{2x^2yz(x^4 + y^4 + z^4) - 4x^2y^5z}{(x^4 + y^4 + z^4)^2} \quad \text{und} \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) &= \frac{x^2y^2(x^4 + y^4 + z^4) - 4x^2y^2z^4}{(x^4 + y^4 + z^4)^2}. \end{aligned}$$

Diese partiellen Ableitungen sind stetig auf $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$. Damit ist f differenzierbar auf $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$.

Sei nun $(x, y, z) = (0, 0, 0)$. Für $t \neq 0$ gilt

$$\frac{1}{t} (f(t, 0, 0) - f(0, 0, 0)) = 0 \rightarrow 0$$

für $t \rightarrow 0$. Somit ist $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0, 0) = 0$. Analog erhält man $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0, 0) = 0 = \frac{\partial f}{\partial z}(0, 0, 0)$. Insgesamt ist damit f partiell differenzierbar auf \mathbb{R}^3 .

Wir zeigen nun noch, dass f in $(0, 0, 0)$ nicht differenzierbar ist. Angenommen f ist in $(0, 0, 0)$ differenzierbar. Dann gilt nach Satz 19.6, dass für $h \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$

$$\frac{1}{|h|} \left(f(h_1, h_2, h_3) - f(0, 0, 0) - A \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} \right) \rightarrow 0$$

für $h \rightarrow (0, 0, 0)$ mit

$$A = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0, 0), \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0, 0), \frac{\partial f}{\partial z}(0, 0, 0) \right) = (0, 0, 0).$$

Zusammen mit $f(0, 0, 0) = 0$ ergibt sich $\lim_{(h_1, h_2, h_3) \rightarrow (0, 0, 0)} \frac{f(h_1, h_2, h_3)}{|h|} = 0$. Sei nun $(h^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ definiert durch $h^{(n)} := \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es gilt $h^{(n)} \rightarrow (0, 0, 0)$ und

$$\frac{f(h^{(n)})}{|h^{(n)}|} = \frac{\frac{n^{-5}}{3n^{-4}}}{\sqrt{3n^{-1}}} = \frac{1}{3\sqrt{3}} \not\rightarrow 0$$

für $n \rightarrow \infty$, was $\lim_{(h_1, h_2, h_3) \rightarrow (0, 0, 0)} \frac{f(h_1, h_2, h_3)}{|h|} = 0$ widerspricht. Also ist f nicht differenzierbar in $(0, 0, 0)$.

AUFGABE 33 (ÜBUNG)

Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4}, & (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass in $(0, 0)$ alle Richtungsableitungen von f existieren, aber f dort nicht differenzierbar ist.

LÖSUNGSVORSCHLAG

Sei $v = (v_x, v_y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ eine beliebige Richtung. Ist $v_x = 0$, so gilt

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0, tv_y) - f((0, 0))}{t} = 0,$$

ist $v_x \neq 0$, so folgt

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(tv) - f((0, 0))}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^3 v_x v_y^2}{t^3 v_x^2 + t^5 v_y^4} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{v_x v_y^2}{v_x^2 + t^2 v_y^4} = \frac{v_y^2}{v_x}.$$

Somit existieren in $(0, 0)$ alle Richtungsableitungen, aber nach **AUFGABE 28 b)** ist f in $(0, 0)$ nicht stetig, also auch nicht differenzierbar.

AUFGABE 34 (TUTORIUM)

Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} \|x\|^2 \sin\left(\frac{1}{\|x\|}\right), & x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f differenzierbar ist, aber nicht stetig partiell differenzierbar.

LÖSUNGSVORSCHLAG

Für $x = (x_1, \dots, x_n)$ gilt

$$f(x_1, \dots, x_n) = \left(\sum_{j=1}^n x_j^2 \right) \sin \left(\frac{1}{\left(\sum_{j=1}^n x_j^2 \right)^{1/2}} \right)$$

Für $x \neq 0$ ist f offensichtlich stetig partiell differenzierbar und somit auch differenzierbar mit

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) &= 2x_j \sin \left(\frac{1}{\left(\sum_{j=1}^n x_j^2 \right)^{1/2}} \right) - \left(\sum_{j=1}^n x_j^2 \right) \cos \left(\frac{1}{\left(\sum_{j=1}^n x_j^2 \right)^{1/2}} \right) \frac{x_j}{\left(\sum_{j=1}^n x_j^2 \right)^{3/2}} \\ &= 2x_j \sin \left(\frac{1}{\|x\|} \right) - \cos \left(\frac{1}{\|x\|} \right) \frac{x_j}{\|x\|}, \end{aligned}$$

somit

$$\nabla f(x) = \left(2 \sin \left(\frac{1}{\|x\|} \right) - \frac{\cos \left(\frac{1}{\|x\|} \right)}{\|x\|} \right) x.$$

In 0 gilt für die partiellen Ableitungen, dass

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(te_j) - f(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} t \sin \left(\frac{1}{t} \right) = 0$$

wegen $|t \sin(\frac{1}{t})| \leq |t|$. Nun ist keine der partiellen Ableitungen stetig in 0, wie man an der Folge erkennt, die überall Nullen enthält und an der j -ten Stelle $\frac{1}{\pi n}$. Damit folgt nämlich

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(0, \dots, 0, \frac{1}{\pi n}, 0, \dots, 0) = -\cos(\pi n) = (-1)^{n+1} \not\rightarrow 0 = \frac{\partial f}{\partial x_j}(0) \quad (n \rightarrow \infty).$$

Allerdings ist f in 0 differenzierbar mit $f'(0) = 0$, da

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|f(x) - f(0)|}{\|x\|} = \lim_{x \rightarrow 0} \|x\| \sin \left(\frac{1}{\|x\|} \right) = 0,$$

mit der gleichen Begründung wie bei den partiellen Ableitungen in 0.

AUFGABE 35 (ÜBUNG)

Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, welche durch

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^3 - x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ gegeben ist.

- Zeigen Sie, dass f auf \mathbb{R}^2 stetig ist.
- Berechnen Sie für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ alle partiellen Ableitungen von f .
- Sind die partiellen Ableitungen von f im Punkt $(0, 0)$ stetig?
- Bestimmen Sie die Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial v}(0, 0)$ für jede Richtung v , für die das möglich ist. Für welche v gilt $\frac{\partial f}{\partial v}(0, 0) = (\nabla f(0, 0)) \cdot v$?

LÖSUNGSVORSCHLAG

a) Klar: f ist als Komposition stetiger Funktionen stetig in allen $(x, y) \neq (0, 0)$. Ferner gilt

$$\left| \frac{y^3 - x^2 y}{x^2 + y^2} \right| = |y| \left| \frac{y^2 - x^2}{x^2 + y^2} \right| \leq |y| \frac{y^2 + x^2}{x^2 + y^2} = |y|$$

für alle $(x, y) \neq (0, 0)$. Deshalb gilt in der Tat $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0)$. Also ist f stetig auf \mathbb{R}^2 .

b) Für $(x, y) \neq 0$ gilt nach der Quotientenregel

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y \frac{-2x(x^2 + y^2) - (y^2 - x^2)2x}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{4xy^3}{(x^2 + y^2)^2}$$

bzw.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{(3y^2 - x^2)(x^2 + y^2) - (y^3 - x^2 y)2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^4 + 4x^2 y^2 - x^4}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Im Punkt $(0, 0)$ gilt hingegen

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0$$

bzw.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h^3}{h^2}}{h} = 1.$$

c) Betrachte $(x_k, y_k) := (\frac{1}{k}, \frac{1}{k}) \rightarrow (0, 0)$ für $k \rightarrow \infty$. Es ist

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_k, y_k) = -\frac{4 \frac{1}{k^4}}{4 \frac{1}{k^4}} = -1 \neq 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0).$$

Also ist $\frac{\partial f}{\partial x}$ unstetig bei $(0, 0)$.

Betrachte $(x_k, y_k) = (\frac{1}{k}, 0) \rightarrow (0, 0)$ für $k \rightarrow \infty$. Es ist

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_k, y_k) = -\frac{\frac{1}{k^4}}{\frac{1}{k^4}} = -1 \neq 1 = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0).$$

Also ist auch $\frac{\partial f}{\partial y}$ unstetig bei $(0, 0)$.

d) Sei $v = (v_x, v_y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Nach Definition gilt:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(tv) - f((0, 0))}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^3(v_y^3 - v_x^2 v_y)}{t^3(v_x^2 + v_y^2)} = \frac{v_y^3 - v_x^2 v_y}{v_x^2 + v_y^2}$$

Ferner ist $(\nabla f)(0,0) \cdot v = v_y$. Also gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = (\nabla f)(0,0) \cdot v &\Leftrightarrow \frac{v_y^3 - v_x^2 v_y}{v_x^2 + v_y^2} = v_y \\ &\Leftrightarrow v_y^3 - v_x^2 v_y = v_x^2 v_y + v_y^3 \\ &\Leftrightarrow v_x^2 v_y = 0 \\ &\Leftrightarrow v_x = 0 \vee v_y = 0 \end{aligned}$$

AUFGABE 36 (TUTORIUM)

Betrachten Sie die Funktion $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, welche durch

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ gegeben ist.

- Zeigen Sie, dass g auf \mathbb{R}^2 stetig ist.
- Berechnen Sie für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ alle partiellen Ableitungen von g .
- Sind die partiellen Ableitungen von g im Punkt $(0,0)$ stetig?
- Bestimmen Sie die Richtungsableitung $\frac{\partial g}{\partial v}(0,0)$ für jede Richtung v , für die das möglich ist. Für welche v gilt $\frac{\partial g}{\partial v}(0,0) = (\nabla g(0,0)) \cdot v$?

LÖSUNGSVORSCHLAG

- Klar: g ist als Komposition stetiger Funktionen stetig in allen $(x,y) \neq (0,0)$. Es ist $|\sin(x)| = \sin(|x|)$ für alle $x \in [-\pi, \pi]$. Ferner gilt $\sin(x) \leq x$ für alle $x \in [0, \infty)$. Es folgt

$$\left| \frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2} \right| = \frac{\sin(|x^3+y^3|)}{x^2+y^2} \leq \frac{|x^3+y^3|}{x^2+y^2} \leq \frac{\overbrace{|x|^3+|y|^3}^{\leq 2 \max\{x,y\}^3}}{\underbrace{x^2+y^2}_{\geq \max\{x,y\}^2}} \leq 2 \max\{x,y\}$$

für alle $(x,y) \neq (0,0)$ mit $\max\{x,y\} \leq 1$. Wenn $\sqrt{x^2+y^2} = \|(x,y)\| \rightarrow 0$, so gilt sowohl $x \rightarrow 0$ als auch $y \rightarrow 0$, somit auch $\max\{x,y\} \rightarrow 0$. Deshalb gilt in der Tat $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x,y) = 0 = g(0,0)$. Also ist g stetig auf \mathbb{R}^2 .

- Wegen $g(x,y) = g(y,x)$ für alle $x,y \in \mathbb{R}$, reicht es aus, lediglich $\frac{\partial g}{\partial x}$ auszurechnen. Es ist dann $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial g}{\partial y}(y,x)$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Für $(x,y) \neq 0$ gilt nach der Quotientenregel

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{3x^2(x^2+y^2)\cos(x^3+y^3) - 2x\sin(x^3+y^3)}{(x^2+y^2)^2}.$$

Im Punkt $(0,0)$ gilt hingegen

$$\frac{\partial g}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h,0) - g(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h^3)}{h^3} \stackrel{\text{l'Hospital}}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h^2 \cos(h^3)}{3h^2} = 1.$$

c) Betrachte $(x_k, y_k) := (0, \frac{1}{k}) \rightarrow (0,0)$ für $k \rightarrow \infty$. Es ist

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x_k, y_k) = 0 \frac{1}{k^4} = 0 \not\rightarrow 1 = \frac{\partial g}{\partial x}(0,0).$$

Also sind $\frac{\partial g}{\partial x}$ und $\frac{\partial g}{\partial y}$ unstetig bei $(0,0)$.

d) Sei $v = (v_x, v_y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Nach Definition gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial v}(0,0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(tv) - g((0,0))}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(t^3(v_x^3 + v_y^3))}{t^3(v_x^2 + v_y^2)} \\ &\stackrel{\text{l'Hospital}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{3t^2(v_x^3 + v_y^3) \cos(t^3(v_x^3 + v_y^3))}{3t^2(v_x^2 + v_y^2)} = \frac{v_x^3 + v_y^3}{v_x^2 + v_y^2} \end{aligned}$$

Ferner ist $(\nabla g)(0,0) \cdot v = v_x + v_y$. Also gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial v}(0,0) = (\nabla g)(0,0) \cdot v &\Leftrightarrow \frac{v_x^3 + v_y^3}{v_x^2 + v_y^2} = v_x + v_y \\ &\Leftrightarrow v_x^3 + v_y^3 = v_x^3 + v_y^3 + v_x^2 v_y + v_x v_y^2 \\ &\Leftrightarrow -v_x^2 v_y = v_x v_y^2 \\ &\Leftrightarrow v_x = 0 \vee v_y = 0 \vee v_x = -v_y \end{aligned}$$