

HÖHERE MATHEMATIK II FÜR DIE FACHRICHTUNG PHYSIK

7. ÜBUNGSBLATT

AUFGABE 37 (ÜBUNG)

Betrachten Sie die Funktionen $f : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ und $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ mit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y > 0\}$ und $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z > 0\}$, sowie

$$f(x, y) = (\log(xy), \cos(x^2 + y), e^x) \quad \text{und} \quad g(x, y, z) = e^x + yz + \log(z)$$

- Berechnen Sie die Ableitungen f', g' .
- Berechnen Sie mit Hilfe der Kettenregel die Ableitung $(g \circ f)'$.
- Berechnen Sie die Ableitung $(g \circ f)'$, indem Sie $g \circ f$ explizit berechnen und dann ableiten.

AUFGABE 38 (TUTORIUM)

Betrachten Sie die Funktionen $f, g, h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, welche durch

$$f(x, y) = (x^2, y^2), \quad g(x, y) = (\sin(xy), e^{x+y}), \quad h(x, y) = (e^x \cos(y), \sinh(x))$$

für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ gegeben sind.

- Berechnen Sie die Ableitungen f', g', h' .
- Berechnen Sie mit Hilfe der Kettenregel die Ableitungen $(g \circ f)', (h \circ g)'$.
- Berechnen Sie die Ableitungen $(g \circ f)', (h \circ g)'$, indem Sie $g \circ f$ bzw. $h \circ g$ explizit berechnen und dann ableiten.

AUFGABE 39 (ÜBUNG)

Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, welche durch

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} \cosh(x) \cos(y) \\ \sinh(x) \sin(y) \end{pmatrix}$$

für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ gegeben ist.

- Zeigen Sie, dass es eine offene Menge $U \ni (\log(2), \frac{\pi}{2})$ und eine offene Menge $V \ni (0, \frac{3}{4})$ gibt, so dass U durch f bijektiv auf V abgebildet wird. Berechnen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion in $(0, \frac{3}{4})$.
- Zeigen Sie, dass f in jedem Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $x > 0$ lokal invertierbar ist, aber dass f auf dieser Menge nicht injektiv ist.

AUFGABE 40 (TUTORIUM)

Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, welche durch

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} (2 + \arctan(x)) \sin(y) \\ -e^x \cos(y) \end{pmatrix}$$

für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ gegeben ist.

- a) Zeigen Sie, dass es eine offene Menge $U \ni (0, \frac{\pi}{4})$ und eine offene Menge $V \ni (\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ gibt, so dass U durch f bijektiv auf V abgebildet wird. Berechnen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion in $(\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$.
- b) Zeigen Sie, dass f in jedem Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ lokal invertierbar ist, aber dass $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ nicht injektiv ist.

AUFGABE 41 (ÜBUNG)

Es sei $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x + y + z > 1) \wedge (y + z > -1)\}$ und $F : D \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$F(x, y, z) = \frac{1}{1 + y + z} + \log(x + y + z - 1)$$

für alle $(x, y, z) \in D$. Zeigen Sie, dass eine offene Menge $(\frac{1}{\sqrt{e}}, 0) \in U \subseteq \mathbb{R}^2$ und eine offene Menge $1 \in V \subseteq \mathbb{R}$, sowie ein $g \in C^1(U, V)$ existieren mit $F(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow z = g(x, y)$ für alle $(x, y) \in U$ und alle $z \in V$. Bestimmen Sie außerdem $g'(\frac{1}{\sqrt{e}}, 0)$.

AUFGABE 42 (TUTORIUM)

Betrachten Sie die Gleichungen

$$x^2 + y^2 - u^2 + v^2 = 0 \quad \text{und} \quad x^2 + 2y^2 - 3u^2 + 4v^2 = 1$$

mit $(x, y, u, v) \in \mathbb{R}^4$. Zeigen Sie, dass durch diese Gleichungen auf einer offenen Menge $(0, 0) \in U \subseteq \mathbb{R}^2$ zwei Funktionen $u, v \in C^1(U)$ mit $u(0, 0) = v(0, 0) = 1$ implizit definiert werden. Berechnen Sie $u'(0, 0)$ sowie $v'(0, 0)$.

AUFGABE 43 (ÜBUNG)

Bestimmen Sie alle Stellen lokaler Extrema der jeweiligen Funktion

$$g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, g(x, y) = 2x^3 - 3xy + 2y^3 - 3 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

und entscheiden Sie, ob es sich dabei um Maxima oder Minima handelt.

AUFGABE 44 (TUTORIUM)

Bestimmen Sie alle Stellen lokaler Extrema der jeweiligen Funktion und entscheiden Sie, ob es sich dabei um Maxima oder Minima handelt.

- a) $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, g(x, y) = xy + x - 2y - 2 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$
- b) $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, h(x, y) = (2x + 2y + 3)e^{-x^2 - y^2} \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$