Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Sebastian Schwarz

SS 2019
06.06.2019

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 7. Übungsblatt

Aufgabe 37 (Übung)

Betrachten Sie die Funktionen $f : D \to \mathbb{R}^3$ und $g : E \to \mathbb{R}$ mit $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x, y > 0\right\}$ und $E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z > 0\right\}$, sowie

$$f(x,y) = (\log(xy), \cos(x^2+y), e^x) \qquad \text{und} \qquad g(x,y,z) = e^x + yz + \log(z)$$

a) Berechnen Sie die Ableitungen f', g'.

b) Berechnen Sie mit Hilfe der Kettenregel die Ableitung $(g \circ f)'$.

c) Berechnen Sie die Ableitung $(g \circ f)'$, indem Sie $g \circ f$ explizit berechnen und dann ableiten.

Lösungsvorschlag

a) Da alle partielle Ableitungen stetig sind, ist f differenzierbar und es gilt für alle $(x,y) \in D$:

$$f'(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial f_3}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_3}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & \frac{1}{y} \\ -2x\sin(x^2+y) & -\sin(x^2+y) \\ e^x & 0 \end{pmatrix}$$

Ebenfalls ist g differenzierbar und es gilt für alle $(x,y,z) \in E$:

$$g'(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial g}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial g}{\partial z}(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x & z & y + \frac{1}{z} \end{pmatrix}$$

b) Für alle $(x,y) \in D$ gilt

$$g'(f(x,y)) = \begin{pmatrix} xy & e^x & \cos(x^2y^2) + e^{-x} \end{pmatrix}.$$

Dementsprechend ergibt sich mit Hilfe der Kettenregel

$$\begin{aligned} (g \circ f)'(x,y) = g'(f(x,y)) \cdot f'(x,y) &= \begin{pmatrix} y - 2xe^x\sin(x^2+y) + 1 + e^x\cos(x^2+y) & x - e^x\sin(x^2+y) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} y + e^x(\cos(x^2+y) - 2x\sin(x^2+y)) + 1 & x - e^x\sin(x^2+y) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

für alle $(x,y) \in D$.

c) Direkte Rechnung ergibt

$$(g \circ f)(x,y) = xy + e^x\cos(x^2+y) + x$$

für alle $(x,y) \in D$. Dementsprechend ist

$$\begin{aligned}
(g \circ f)'(x,y) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial(g\circ f)}{\partial x} & \frac{\partial(g\circ f)}{\partial y} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} y + e^x \cos(x^2+y) - 2xe^x \sin(x^2+y) + 1 & x - e^x \sin(x^2+y) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} y + e^x(\cos(x^2+y) - 2x\sin(x^2+y)) + 1 & x - e^x \sin(x^2+y) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

für alle $(x,y) \in D$.

Aufgabe 38 (Tutorium)

Betrachten Sie die Funktionen $f, g, h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, welche durch

$$f(x,y) = (x^2, y^2), \qquad g(x,y) = (\sin(xy), e^{x+y}), \qquad h(x,y) = (e^x \cos(y), \sinh(x))$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ gegeben sind.

a) Berechnen Sie die Ableitungen f', g', h'.

b) Berechnen Sie mit Hilfe der Kettenregel die Ableitungen $(g \circ f)', (h \circ g)'$.

c) Berechnen Sie die Ableitungen $(g \circ f)', (h \circ g)'$, indem Sie $g \circ f$ bzw. $h \circ g$ explizit berechnen und dann ableiten.

Lösungsvorschlag

a) Da alle partielle Ableitungen stetig sind, sind f, g und h differenzierbar und es gilt für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$f'(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 2y \end{pmatrix},$$

$$g'(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial g_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial g_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial g_2}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y\cos(xy) & x\cos(xy) \\ e^{x+y} & e^{x+y} \end{pmatrix}, \text{ sowie}$$

$$h'(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial h_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial h_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial h_2}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x\cos(y) & -e^x\sin(y) \\ \cosh(x) & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$g'(f(x,y)) = \begin{pmatrix} y^2\cos(x^2y^2) & x^2\cos(x^2y^2) \\ e^{x^2+y^2} & e^{x^2+y^2} \end{pmatrix}, \text{ sowie}$$

$$h'(g(x,y)) = \begin{pmatrix} e^{\sin(xy)}\cos(e^{x+y}) & -e^{\sin(xy)}\sin(e^{x+y}) \\ \cosh(\sin(xy)) & 0 \end{pmatrix}.$$

Dementsprechend ergibt sich mit Hilfe der Kettenregel

$$(g \circ f)'(x,y) = g'(f(x,y)) \cdot f'(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy^2\cos(x^2y^2) & 2x^2y\cos(x^2y^2) \\ 2xe^{x^2+y^2} & 2ye^{x^2+y^2} \end{pmatrix}, \text{ sowie}$$

$$(h\circ g)'(x,y) = h'(g(x,y))\cdot g'(x,y)$$
$$= \begin{pmatrix} y\cos(xy)\cos(e^{x+y})e^{\sin(xy)} - e^{x+y}e^{\sin(xy)}\sin(e^{x+y}) & x\cos(xy)\cos(e^{x+y})e^{\sin(xy)} - e^{x+y}e^{\sin(xy)}\sin(e^{x+y}) \\ y\cos(xy)\cosh(\sin(xy)) & x\cos(xy)\cosh(\sin(xy)) \end{pmatrix}$$

für alle $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

c) Direkte Rechnung ergibt

$$(g\circ f)(x,y) = \begin{pmatrix}\sin(x^2y^2) & e^{x^2+y^2}\end{pmatrix}, \text{ sowie}$$
$$(h\circ g)(x,y) = \begin{pmatrix}e^{\sin(xy)}\cos(e^{x+y}) & \sinh(\sin(xy))\end{pmatrix}.$$

für alle $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

Dementsprechend ist

$$\begin{aligned}(g\circ f)'(x,y) &= \begin{pmatrix}\frac{\partial(g\circ f)_1}{\partial x} & \frac{\partial(g\circ f)_1}{\partial y}\\ \frac{\partial(g\circ f)_2}{\partial x} & \frac{\partial(g\circ f)_2}{\partial y}\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}y+e^x\cos(x^2+y)-2xe^x\sin(x^2+y)+1 & x-e^x\sin(x^2+y)\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}y+e^x(\cos(x^2+y)-2x\sin(x^2+y))+1 & x-e^x\sin(x^2+y)\end{pmatrix}, \text{ sowie}\end{aligned}$$

$$(h\circ g)'(x,y) = \begin{pmatrix}\frac{\partial(h\circ g)_1}{\partial x} & \frac{\partial(h\circ g)_1}{\partial y}\\ \frac{\partial(h\circ g)_2}{\partial x} & \frac{\partial(h\circ g)_2}{\partial y}\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} y\cos(xy)e^{\sin(xy)}\cos(e^{x+y}) - e^{\sin(xy)}e^{x+y}\sin(e^{x+y}) & x\cos(xy)e^{\sin(xy)}\cos(e^{x+y}) - e^{\sin(xy)}e^{x+y}\sin(e^{x+y}) \\ y\cos(xy)\cosh(\sin(xy)) & x\cos(xy)\cosh(\sin(xy)) \end{pmatrix}$$

für alle $(x,y)\in D$.

Aufgabe 39 (Übung)

Betrachten Sie die Funktion $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, welche durch

$$f(x,y) = \begin{pmatrix}\cosh(x)\cos(y)\\ \sinh(x)\sin(y)\end{pmatrix}$$

für alle $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ gegeben ist.

a) Zeigen Sie, dass es eine offene Menge $U\ni(\log(2),\frac{\pi}{2})$ und eine offene Menge $V\ni(0,\frac{3}{4})$ gibt, so dass U durch f bijektiv auf V abgebildet wird. Berechnen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion in $(0,\frac{3}{4})$.

b) Zeigen Sie, dass f in jedem Punkt $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ mit $x>0$ lokal invertierbar ist, aber dass f auf dieser Menge nicht injektiv ist.

Lösungsvorschlag

Wir berechnen vorbereitend für alle $(x,y)\in\mathbb{R}^2$:

$$f'(x,y) = \begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y)\\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sinh(x)\cos(y) & -\cosh(x)\sin(y)\\ \cosh(x)\sin(y) & \sinh(x)\cos(y)\end{pmatrix}$$

a) Wir stellen die Voraussetzungen des Umkehrsatzes (19.11) sicher. Es ist in der Tat

$$f\left(\log(2), \frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} \cosh(\log(2))\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ \sinh(\log(2))\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

Wir versuchen die Inverse von

$$f'\left(\log(2), \frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{5}{4} \\ \frac{5}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

zu berechnen:

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{5}{4} & 1 & 0 \\ \frac{5}{4} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{5}{4} & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} | \cdot \frac{4}{5} \\ | \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{4}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{5} & 0 \end{pmatrix}$$

Also ist $f'\left(\log(2), \frac{\pi}{2}\right)$ in der Tat invertierbar. Nach dem Umkehrsatz existieren die gesuchten offenen Mengen U und V. Ebenfalls nach dem Umkehrsatz gilt für die Ableitung der Umkehrfunktion $f^{-1} : V \to U$

$$(f^{-1})'\left(0, \frac{3}{4}\right) = (f^{-1})'\left(f\left(\log(2), \frac{\pi}{2}\right)\right) = \left[f'\left(\log(2), \frac{\pi}{2}\right)\right]^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & 0 \end{pmatrix}$$

b) Es gilt nach obiger Rechnung

$$\det(f'(x,y)) = \sinh^2(x)\cos^2(y) + \cosh^2(x)\sin^2(y)$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Wegen $\sin(y) = 0 \Leftrightarrow y \in \pi\mathbb{Z}$ und $\cos(y) = 0 \Leftrightarrow y \in \pi(\frac{1}{2} + \mathbb{Z})$ werden die $\sin^2$ bzw. $\cos^2$-Terme nie gleichzeitig verschwinden. Also ist $\det(f'(x,y)) > 0$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $x \neq 0$. Damit ist der Umkehrsatz überall anwendbar, d.h. f ist überall lokal invertierbar.

Wegen

$$f(x, y+2\pi) = \begin{pmatrix} \cosh(x)\cos(y+2\pi) \\ \sinh(x)\sin(y+2\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(x)\cos(y) \\ \sinh(x)\sin(y) \end{pmatrix} = f(x,y)$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ (mit $x > 0$) ist f nicht injektiv.

Aufgabe 40 (Tutorium)

Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, welche durch

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} (2 + \arctan(x))\sin(y) \\ -e^x\cos(y) \end{pmatrix}$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ gegeben ist.

a) Zeigen Sie, dass es eine offene Menge $U \ni (0, \frac{\pi}{4})$ und eine offene Menge $V \ni (\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ gibt, so dass U durch f bijektiv auf V abgebildet wird. Berechnen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion in $(\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$.

b) Zeigen Sie, dass f in jedem Punkt $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ lokal invertierbar ist, aber dass $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ nicht injektiv ist.

Lösungsvorschlag

Wir berechnen vorbereitend für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$f'(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sin(y)}{1+x^2} & (2+\arctan(x))\cos(y) \\ -e^x\cos(y) & e^x\sin(y) \end{pmatrix}$$

a) Wir stellen die Voraussetzungen des Umkehrsatzes (19.11) sicher. Es ist in der Tat

$$f\left(0,\frac{\pi}{4}\right) = \begin{pmatrix} (2+\arctan(0))\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ -e^0\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

Wir versuchen die Inverse von

$$f'\left(0,\frac{\pi}{4}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \sqrt{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

zu berechnen:

$$\left(\begin{array}{cccc} \frac{\sqrt{2}}{2} & \sqrt{2} & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \leftarrow + \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc} \frac{\sqrt{2}}{2} & \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3\sqrt{2}}{2} & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \cdot\left(-\frac{2}{3}\right) \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{3\sqrt{2}}{2} & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \mid \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} \\ \mid \cdot \frac{2}{3\sqrt{2}} \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 & 1 & \frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{3} \end{array}\right)$$

Also ist $f'\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ in der Tat invertierbar. Nach dem Umkehrsatz existieren die gesuchten offenen Mengen U und V. Ebenfalls nach dem Umkehrsatz gilt für die Ableitung der Umkehrfunktion $f^{-1} : V \to U$

$$(f^{-1})'\left(\sqrt{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = (f^{-1})'\left(f\left(0,\frac{\pi}{4}\right)\right) = \left[f'\left(0,\frac{\pi}{4}\right)\right]^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix}$$

b) Es gilt nach obiger Rechnung

$$\det(f'(x,y)) = \frac{\sin^2(y)e^x}{1+x^2} + e^x(2+\arctan(x))\cos^2(y)$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Wegen $\sin(y) = 0 \Leftrightarrow y \in \pi\mathbb{Z}$ und $\cos(y) = 0 \Leftrightarrow y \in \pi(\frac{1}{2} + \mathbb{Z})$ werden die $\sin^2$ bzw. $\cos^2$-Terme nie gleichzeitig verschwinden. Also ist $\det(f'(x,y)) > 0$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Damit ist der Umkehrsatz überall anwendbar, d.h. f ist überall lokal invertierbar.

Wegen

$$f(x,y+2\pi) = \begin{pmatrix} (2+\arctan(x))\sin(y+2\pi) \\ -e^x\cos(y+2\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2+\arctan(x))\sin(y) \\ -e^x\cos(y) \end{pmatrix} = f(x,y)$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ist f nicht injektiv.

Aufgabe 41 (Übung)

Es sei $D = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x+y+z>1) \wedge (y+z>-1)\Big\}$ und $F : D \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$F(x,y,z) = \frac{1}{1+y+z} + \log(x+y+z-1)$$

für alle $(x,y,z) \in D$. Zeigen Sie, dass eine offene Menge $(\frac{1}{\sqrt{e}},0) \in U \subseteq \mathbb{R}^2$ und eine offene Menge $1 \in V \subseteq \mathbb{R}$, sowie ein $g \in C^1(U,V)$ existieren mit $F(x,y,z)=0 \Leftrightarrow z = g(x,y)$ für alle $(x,y) \in U$ und alle $z \in V$. Bestimmen Sie außerdem $g'(\frac{1}{\sqrt{e}},0)$.

Lösungsvorschlag

a) Klar: $F \in C^1(D)$. Ferner gilt

$$F\left(\frac{1}{\sqrt{e}},0,1\right) = \frac{1}{1+0+1} + \log\left(\frac{1}{\sqrt{e}}+0+1-1\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0,$$

sowie

$$\begin{aligned} F'(x,y,z) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{x+y+z-1} & -\frac{1}{(1+y+z)^2} + \frac{1}{x+y+z-1} & -\frac{1}{(1+y+z)^2} + \frac{1}{x+y+z-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

für alle $(x,y,z) \in D$. Insbesondere ist

$$\frac{\partial F}{\partial z}\left(\frac{1}{\sqrt{e}},0,1\right) = -\frac{1}{(1+0+1)^2} + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{e}}+0+1-1} = \sqrt{e} - \frac{1}{4} \neq 0.$$

Nach dem Satz über implizit definierte Funktionen (19.12), existieren U, V und g mit den geforderten Eigenschaften. Außerdem folgt

$$g'(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}},0) = -(\frac{\partial F}{\partial z}(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}},0,1))^{-1} \cdot (\frac{\partial F}{\partial x}(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}},0,1) \quad \frac{\partial F}{\partial y}(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}},0,1)) = -\begin{pmatrix} 1+\frac{1}{4\sqrt{\mathrm{e}}-1} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 42 (Tutorium)

Betrachten Sie die Gleichungen

$$x^2+y^2-u^2+v^2 = 0 \qquad \text{und} \qquad x^2+2y^2-3u^2+4v^2 = 1$$

mit $(x,y,u,v) \in \mathbb{R}^4$. Zeigen Sie, dass durch diese Gleichungen auf einer offenen Menge $(0,0) \in U \subseteq \mathbb{R}^2$ zwei Funktionen $u,v \in C^1(U)$ mit $u(0,0) = v(0,0) = 1$ implizit definiert werden. Berechnen Sie $u'(0,0)$ sowie $v'(0,0)$.

Lösungsvorschlag

Definiere $G : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ durch

$$G(x,y,u,v) = \begin{pmatrix} x^2+y^2-u^2+v^2 \\ x^2+2y^2-3u^2+4v^2-1 \end{pmatrix}$$

für alle $(x, y, u, v) \in \mathbb{R}^4$. Die Aufgabe besteht offenbar darin, die Gleichung $G(x, y, u, v) = 0$ in der Nähe des Punktes $(x, y, u, v) = (0, 0, 1, 1)$ nach (u, v) aufzulösen.

Klar: $G \in C^1(\mathbb{R}^4)$. Ferner gilt

$$G(0,0,1,1) = \begin{pmatrix} 0^2 + 0^2 - (1)^2 + (1)^2 \\ 0^2 + 2 \cdot 0^2 - 3 \cdot (1)^2 + 4 \cdot (1)^2 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

sowie

$$\begin{aligned} G'(x,y,u,v) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial x}(x,y,u,v) & \frac{\partial G_1}{\partial y}(x,y,u,v) & \frac{\partial G_1}{\partial u}(x,y,u,v) & \frac{\partial G_1}{\partial v}(x,y,u,v) \\ \frac{\partial G_2}{\partial x}(x,y,u,v) & \frac{\partial G_2}{\partial y}(x,y,u,v) & \frac{\partial G_2}{\partial u}(x,y,u,v) & \frac{\partial G_2}{\partial v}(x,y,u,v) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2x & 2y & -2u & 2v \\ 2x & 4y & -6u & 8v \end{pmatrix} \end{aligned}$$

für alle $(x, y, u, v) \in \mathbb{R}^4$. Versuche die (2×2)-Matrix $\frac{\partial G}{\partial(u,v)}(0,0,1,1)$ zu invertieren:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial G}{\partial(u,v)}(0,0,1,1) \middle| I_2 \right) &\sim \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 & 0 \\ -6 & 8 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(-3) \\ + \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} + \\ \cdot(-1) \end{matrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} | \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \\ | \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &\sim \left(I_2 \middle| \left(\frac{\partial G}{\partial(u,v)}(0,0,1,1) \right)^{-1} \right) \end{aligned}$$

Nach dem Satz über implizit definierte Funktionen (19.12) existiert eine offene Menge $(0,0) \in U \subseteq \mathbb{R}^2$, eine offene Menge $(1,1) \in V \subseteq \mathbb{R}^2$, sowie ein $g \in C^1(U, V)$ mit

$$G(x,y,u,v) = 0 \Leftrightarrow (u,v) = (g_1(x,y), g_2(x,y))$$

für alle $(x, y) \in U$ und alle $(u, v) \in V$. Für die Ableitung g' gilt

$$g'(x,y) = -\left(\frac{\partial G}{\partial(u,v)}(x,y,g(x,y)) \right)^{-1} \cdot \frac{\partial G}{\partial(x,y)}(x,y,g(x,y))$$

für alle $(x, y) \in U$. Insbesondere gilt für $(x, y) = (0, 0)$

$$g'(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Damit ist $u'(0,0) = (0,0) = v'(0,0)$.

Aufgabe 43 (Übung)

Bestimmen Sie alle Stellen lokaler Extrema der jeweiligen Funktion

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\, g(x,y) = 2x^3 - 3xy + 2y^3 - 3 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

und entscheiden Sie, ob es sich dabei um Maxima oder Minima handelt.

Lösungsvorschlag

Klar: $g \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Berechne g'. Es ist

$$g'(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x^2 - 3y & -3x + 6y^2 \end{pmatrix}$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Nach Satz 19.17 der Vorlesung ist $g'(x_0,y_0) = 0$ eine notwendige Bedingung für jede Stelle $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ eines lokalen Extremums von g. Berechne diese kritischen Punkte:

$$\begin{aligned} g'(x,y) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (6x^2 - 3y = 0) \wedge (-3x + 6y^2 = 0) \Leftrightarrow (x = 2y^2) \wedge (6x^2 = 3y) \\ &\Leftrightarrow \quad (x = 2y^2) \wedge (24y^4 = 3y) \Leftrightarrow (x = y = 0) \vee \left(x = y = \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

Also sind $(x_0,y_0) = (0,0)$ und $(x_1,y_1) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ genau die kritischen Punkte von g.
Berechne nun H_g. Es ist

$$H_g(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12x & -3 \\ -3 & 12y \end{pmatrix}$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

- Untersuche $H_g(x_0,y_0) =: A$ durch Bestimmung der Eigenwerte auf Definitheit: Das charakteristische Polynom p_A ist durch

  $$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} -\lambda & -3 \\ -3 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3^2 = (\lambda - 3)(\lambda + 3)$$

  für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ gegeben. Also sind ± 3 die Eigenwerte von A. Nach der Charakterisierung aus Satz 18.12 der Vorlesung ist also A indefinit. Nach Satz 19.17 der Vorlesung hat g in (x_0,y_0) kein lokales Extremum, sondern einen Sattelpunkt.

- Untersuche $H_g(x_1,y_1) =: B$ durch Bestimmung der Eigenwerte auf Definitheit: Das charakteristische Polynom p_B ist durch

  $$p_B(\lambda) = \det(B - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 6 - \lambda & -3 \\ -3 & 6 - \lambda \end{vmatrix} = (6 - \lambda)^2 - 3^2 = (3 - \lambda)(9 - \lambda)$$

  für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ gegeben. Also sind 3 und 9 die Eigenwerte von B. Nach der Charakterisierung aus Satz 18.12 der Vorlesung ist also B positiv definit. Nach Satz 19.17 der Vorlesung hat g in (x_1,y_1) ein lokales Minimum.

Aufgabe 44 (Tutorium)

Bestimmen Sie alle Stellen lokaler Extrema der jeweiligen Funktion und entscheiden Sie, ob es sich dabei um Maxima oder Minima handelt.

a) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(x,y) = xy + x - 2y - 2 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

b) $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $h(x,y) = (2x + 2y + 3)e^{-x^2-y^2} \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

Lösungsvorschlag

a) Klar: $g \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Berechne g'. Es ist

$$g'(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y+1 & x-2 \end{pmatrix}$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Nach Satz 19.17 der Vorlesung ist $g'(x_0,y_0) = 0$ eine notwendige Bedingung für jede Stelle $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ eines lokalen Extremums von g. Also ist $(x_0,y_0) = (2,-1)$ der einzige kritische Punkt von g.

Berechne nun $H_g(x_0,y_0)$. Es ist

$$H_g(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Untersuche $H_g(x_0,y_0) =: A$ durch Bestimmung der Eigenwerte auf Definitheit. Das charakteristische Polynom p_A ist durch

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$$

für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ gegeben. Also sind ± 1 die Eigenwerte von A. Nach der Charakterisierung aus Satz 18.12 der Vorlesung ist also A indefinit. Nach Satz 19.17 der Vorlesung hat f in (x_0,y_0) kein lokales Extremum, sondern einen Sattelpunkt.

b) Klar: $h \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Berechne h'. Es ist

$$h'(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial h}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = 2e^{-x^2-y^2} \begin{pmatrix} 1 - x(2x+2y+3) & 1 - y(2x+2y+3) \end{pmatrix}$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Nach Satz 19.17 der Vorlesung ist $h'(x_0,y_0) = 0$ eine notwendige Bedingung für jede Stelle $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ eines lokalen Extremums von h. Berechne diese kritischen Punkte:

$$\begin{aligned} h'(x,y) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad x(2x+2y+3) = y(2x+2y+3) = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad (x = y \neq 0) \wedge (x(2x+2x+3) = 1) \\ &\Leftrightarrow \quad (x = y \neq 0) \wedge (x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{1}{4} = 0) \\ &\Leftrightarrow \quad (x = y) \wedge \left(x \in \left\{ -\frac{3}{8} + \sqrt{\frac{9}{64} + \frac{1}{4}}, -\frac{3}{8} - \sqrt{\frac{9}{64} + \frac{1}{4}} \right\} \right) \\ &\Leftrightarrow \quad (x = y) \wedge \left(x \in \left\{ -1, \frac{1}{4} \right\} \right) \end{aligned}$$

Also sind $(x_0,y_0) = (-1,-1)$ und $(x_1,y_1) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ genau die kritischen Punkte von h.

Berechne nun H_h. Es ist

$$\begin{aligned} H_h(x,y) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 h}{\partial y \partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 h}{\partial y \partial y}(x,y) \end{pmatrix} \\ &= 2e^{-x^2-y^2} \begin{pmatrix} 4x^3+4x^2y+6x^2-6x-2y-3 & 4x^2y+4xy^2+6xy-2x-2y \\ 4x^2y+4xy^2+6xy-2x-2y & 4y^3+4xy^2+6y^2-2x-6y-3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Insbesondere ist

$$\begin{aligned} H_h(x,x) &= 2e^{-2x^2} \begin{pmatrix} 8x^3+6x^2-8x-3 & 8x^3+6x^2-4x \\ 8x^3+6x^2-4x & 8x^3+6x^2-8x-3 \end{pmatrix} \\ &= 2e^{-2x^2} \begin{pmatrix} 8x\left(x^2+\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}-\frac{3}{4}\right)-3 & 8x\left(x^2+\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right) \\ 8x\left(x^2+\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right) & 8x\left(x^2+\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}-\frac{3}{4}\right)-3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ und

$$H_h(x_0,y_0) = \frac{2}{e^2}\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}}_{=:A} \qquad \text{und} \qquad H_h(x_1,y_1) = -\frac{1}{\sqrt[8]{e}}\underbrace{\begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}}_{=:B}.$$

- Untersuche A durch Bestimmung der Eigenwerte auf Definitheit: Das charakteristische Polynom p_A ist durch

  $$p_A(\lambda) = \det(A-\lambda I_2) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2 - 2^2 = (1-\lambda)(5-\lambda)$$

  für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ gegeben. Also sind 1 und 5 die Eigenwerte von A. Nach der Charakterisierung aus Satz 18.12 der Vorlesung ist also A positiv definit. Damit ist auch $H_h(x_0,y_0)$ positiv definit. Nach Satz 19.17 der Vorlesung hat h in (x_0,y_0) ein lokales Minimum.
- Untersuche B durch Bestimmung der Eigenwerte auf Definitheit: Das charakteristische Polynom p_B ist durch

  $$p_B(\lambda) = \det(B-\lambda I_2) = \begin{vmatrix} 9-\lambda & 1 \\ 1 & 9-\lambda \end{vmatrix} = (9-\lambda)^2 - 1^2 = (8-\lambda)(10-\lambda)$$

  für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ gegeben. Also sind 8 und 10 die Eigenwerte von B. Nach der Charakterisierung aus Satz 18.12 der Vorlesung ist also B positiv definit. Damit ist $H_h(x_1,y_1)$ negativ definit. Nach Satz 19.17 der Vorlesung hat h in (x_1,y_1) ein lokales Maximum.