Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Sebastian Schwarz

SS 2019
13.06.2019

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 8. Übungsblatt

Aufgabe 45 (Übung)

Es seien

$$A = \Big\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + 2x_2^2 = 6\Big\} \quad \text{und} \quad B = \Big\{(y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2 : y_1 + y_2 = 5\Big\}.$$

Zeigen Sie, dass ein $x_0 \in A$ und ein y_0 in B existiert, mit

$$\|x_0 - y_0\| = d(A,B) := \inf_{x\in A, y\in B} \{\|x-y\|\}.$$

Berechnen Sie den Wert von $d(A,B)$ mit Hilfe der Multiplikatorenregel von Lagrange.

Lösungsvorschlag

Für $x = (2,1)$ und $y = (4,1)$ ist $x \in A$ und $y \in B$. Damit ist $\|x-y\| = 2 \geqslant d(A,B)$. Ferner gilt für alle $x = (x_1,x_2) \in A$

$$\|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2 \leqslant x_1^2 + 2x_2^2 = 6 < 9,$$

also $\|x\| < 3$. Ferner gilt für alle $y \in B$ mit $\|y\| > 5$

$$\|x-y\| \geq |\|x\| - \|y\|| = \|y\| - \|x\| > 5 - 3 = 2 \geqslant d(A,B).$$

Ist $\|x\|^2 + \|y\|^2 > 36$, so ist nach Obigem $\|y\|^2 > 36 - \|x\|^2 > 25$, also $\|y\| > 5$ und $\|x-y\| > 2$. Betrachte $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x_1,x_2,y_1,y_2) = \|(x_1-y_1, x_2-y_2)\|^2$$

für alle $(x_1,x_2,y_1,y_2) \in \mathbb{R}^4$. Klar: $f \in C^1(\mathbb{R}^4)$. Ferner sei $h : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$h(x_1,x_2,y_1,y_2) = \begin{pmatrix} x_1^2 + 2x_2^2 - 6 \\ y_1 + y_2 - 5 \end{pmatrix}$$

für alle $(x_1,x_2,y_1,y_2) \in \mathbb{R}^4$. Ebenfalls klar: $h \in C^1(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^2)$. Nach obiger Rechnung gilt $f(x_1,x_2,y_1,y_2) > 4$ für alle $\|(x_1,x_2,y_1,y_2)\| > 6$ und $f(2,1,4,1) = 4$, wobei $h(2,1,4,1) = 0$ und $\|(2,1,4,1)\| = \sqrt{22} < 6$. Es folgt also

$$\inf\Big\{f(v) : v \in \mathbb{R}^4 \wedge h(v) = 0\Big\} = \inf\{f(v) : v \in \{\|v\| \leqslant 6\} \wedge h(v) = 0\} = \inf_{v\in S} f(v)$$

mit $S = h^{-1}(\{0\}) \cap \{\|v\| \leqslant 6\}$. Da h stetig ist und $\{0\} \subseteq \mathbb{R}^2$ abgeschlossen, ist auch $h^{-1}(\{0\})$ abgeschlossen. $\{\|v\| \leqslant 6\}$ ist ebenfalls abgeschlossen, wie man über die Folgencharakterisierung einfach feststellt. Damit ist S beschränkt und abgeschlossen, also nach Abschnitt 19.18 der Vorlesung kompakt.

Ebenfalls nach Abschnitt 19.18 der Vorlesung, existiert ein $v_0 \in S$ mit

$$f(v_0) = \min_{v \in S} f(v).$$

Die gesuchten Vektoren sind also gerade $x_0 = (v_1, v_2)$ bzw. $y_0 = (v_3, v_4)$.
Die Stelle v_0 des globalen Minimums von f unter der Nebenbedingung $h = 0$ ist natürlich auch eine Stelle eines lokalen Extremums von f unter der Nebenbedingung $h = 0$. Wir wenden die Multiplikatorenregel von Lagrange (19.19) an, um diese zu identifizieren: Es ist

$$h'(x_1, x_2, y_1, y_2) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 4x_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

für alle $(x_1, x_2, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^4$. Wegen $h(x_1, x_2, y_1, y_2) = 0 \Rightarrow x_1, x_2 \neq 0$, hat h' auf $h^{-1}(\{0\})$ den vollen Rang 2. Es existiert $\lambda_0 = (\lambda_1^0, \lambda_2^0) \in \mathbb{R}^2$ mit

$$\operatorname{grad} L(v_0, \lambda_1^0, \lambda_2^0) = 0,$$

(wobei $L(v, \lambda_1, \lambda_2^0) = f(v) + \lambda^T h(v)$). Somit ergeben sich daraus die Gleichungen

$$f'(v_1, v_2, v_3, v_4) = -{\lambda_0}^T h'(v_1, v_2, v_3, v_4).$$

und die Nebenbedingungen $h(v_1, v_2, v_3, v_4) = 0$, was die sechs Gleichungen

$$\begin{aligned} 2(v_1 - v_3) &= -2v_1\lambda_1^0 && (1) \\ 2(v_2 - v_4) &= -4v_2\lambda_1^0 && (2) \\ -2(v_1 - v_3) &= -\lambda_2^0 && (3) \\ -2(v_2 - v_4) &= -\lambda_2^0 && (4) \\ v_1^2 + 2v_2^2 &= 6 && (5) \\ v_3 + v_4 &= 5 && (6) \end{aligned}$$

liefert. Wir wollen zunächst $\lambda_1^0 \neq 0$ einsehen: Wäre $\lambda_1^0 = 0$, dann folgte aus (1) und (2) $v_1 = v_3$ und $v_2 = v_4$. Dann wäre mit (6) $v_1 = 5 - v_2$ und mit (5) $(5 - v_2)^2 + 2v_2^2 = 6$, bzw. $v_2^2 - \frac{10}{3}v_2 + \frac{19}{3} = 0$. Wegen $\left(\frac{5}{3}\right)^2 < \frac{19}{3}$ hat diese Gleichung keine reellen Lösungen. Also ist in der Tat $\lambda_1^0 \neq 0$.
Einsetzen von (3) in (1) und (4) in (2) liefert

$$2v_1\lambda_1^0 = -\lambda_2^0 = 4v_2\lambda_1^0.$$

Da $\lambda_1^0 \neq 0$ nach Obigem, muss

$$v_1 = 2v_2 \tag{7}$$

gelten. Einsetzen in (5) liefert $v_2^2 = 1$, also $v_2 \in \{-1, 1\}$. Differenzbildung von (3) und (4) liefert $(v_1 - v_2) + (v_4 - v_3) = 0$. Einsetzen von (7) und (6) liefert $v_3 = \frac{5+v_2}{2}$. Wieder (6) liefert schließlich $v_4 = \frac{5-v_2}{2}$. Zusammenfassend ergibt sich:

$$v_1 \;=\; 2v_2, \qquad v_2\{-1, 1\}, \qquad v_3 = \frac{5 + v_2}{2}, \qquad v_4 = \frac{5 - v_2}{2}$$

Insgesamt also $v \in \{(-2, -1, 2, 3), (2, 1, 3, 2)\}$. Wegen $f(-2, -1, 2, 3) = (-2 - 2)^2 + (-1 - 3)^2 = 32$ und $f(2, 1, 3, 2) = (2 - 3)^2 + (1 - 2)^2 = 2$ ist $v = (2, 1, 3, 2)$ und $d(A, B) = \sqrt{f(v)} = \sqrt{2}$.

Aufgabe 46 (Tutorium)

Es sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y,z) := (x+y+z)^2$$

und der Ellipsoid

$$C := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 1\}$$

gegeben. Bestimmen Sie $\max(f(C))$ und $\min(f(C))$.

Lösungsvorschlag

Wir definieren $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ durch $h(x,y,z) := x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 1$. Dann ist $h \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ und $C = h^{-1}(\{0\})$. Da $\{0\}$ abgeschlossen und h stetig ist, ist C abgeschlossen. Außerdem gilt für $(x,y,z) \in C$, dass

$$\|(x,y,z)\| = \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{1/2} \leq \left(x^2 + 2y^2 + 2z^2\right)^{1/2} = 1.$$

Damit ist C beschränkt und nach Satz 19.8 daher insgesamt kompakt. Da f stetig ist, existieren somit $a, b \in C$ mit $f(a) = \min(f(C))$ und $f(b) = \max(f(C))$.

Sei $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Dann gilt $\nabla h(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x \\ 4y \\ 4z \end{pmatrix}$. Folglich haben wir die Äquivalenz

$$\nabla h(x,y,z) \text{ hat vollen Rang.} \quad \Longleftrightarrow \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} =: M.$$

Es gilt $f, h \in C^1(M, \mathbb{R})$ und $C \subset M$. Somit existiert für jedes Extremum (x_0, y_0, z_0) mit der Nebenbedingung $h(x_0, y_0, z_0) = 0$ ein Lagrangemultiplikator $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) = -\lambda \nabla h(x_0, y_0, z_0) \iff (x_0 + y_0 + z_0) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\lambda \begin{pmatrix} x_0 \\ 2y_0 \\ 2z_0 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Wir schreiben dies als

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1+\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1+2\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1+2\lambda \end{pmatrix}}_{=:A(\lambda)} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{9}$$

und stellen fest, dass

$$\begin{aligned} \det(A(\lambda)) &= (1+\lambda)(1+2\lambda)^2 + 1 + 1 - (1+\lambda) - 2(1+2\lambda) \\ &= (1+\lambda)(1+4\lambda+4\lambda^2) - 1 - 5\lambda \\ &= 8\lambda^2 + 4\lambda^3 \\ &= 4\lambda^2(\lambda+2) \end{aligned}$$

gilt. Damit folgt:

$$A(\lambda) \text{ ist invertierbar.} \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda \notin \{-2, 0\}.$$

Für $\lambda \notin \{0, -2\}$ löst also nur $(x_0, y_0, z_0) = (0,0,0)$ die Gleichung (9). Da aber $(0,0,0) \notin C$ gilt, folgt $\lambda \in \{-2, 0\}$ in jedem Extremum von f auf C.

Sei $\lambda = -2$. Durch Gaußumformungen erhält man

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(x_0, y_0, z_0) löst Gleichung (9) also genau dann, wenn es ein $\alpha \in \mathbb{R}$ gibt mit $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Für $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in C \quad &\Longleftrightarrow \quad h\Big(\alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\Big) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad (2\alpha)^2 + 2\alpha^2 + 2\alpha^2 - 1 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha \in \Big\{-\frac{1}{\sqrt{8}}, \frac{1}{\sqrt{8}}\Big\}. \end{aligned}$$

Wir definieren

$$L_{-2} := \Big\{-\frac{1}{\sqrt{8}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\Big\}.$$

Sei $\lambda = 0$. Dann folgt mit Gleichung (8) die Identität $x_0 + y_0 + z_0 = 0$. Dann haben wir für jedes $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$$f(x, y, z) \geq 0 = f(x_0, y_0, z_0).$$

f hat auf C somit das Minimum 0, falls

$$L_0 := C \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$$

nicht leer ist. Dies ist der Fall, da $v_0 := \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \in L_0$ gilt.

Als mögliche Punkte für die Extrema von f auf C kommen nach den bisherigen Überlegungen nur die Elemente von L_{-2} und L_0 in Frage. Für $v \in L_0$ gilt $f(v) = 0$ und für $v \in L_{-2}$ erhält man durch Einsetzen $f(v) = 2$. Damit ergibt sich insgesamt $\min(f(C)) = 0$ und $\max(f(C)) = 2$.

Aufgabe 47 (Übung)

Bestimmen Sie alle lokalen Minima und Maxima der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = 4x^2 - 3xy$$

auf der Menge

$$D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}.$$

Lösungsvorschlag

Wir untersuchen $f \in C^2(\mathbb{R}^2, R)$ zunächst auf lokale Extremstellen in $U_1(0)$. Dazu berechnen wir

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 8x - 3y \\ -3x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = y = 0.$$

Für die Hessematrix von f gilt

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix},$$

was somit auch die Matrix $A := H_f(0,0)$ ist. Es gilt

$$p_A(\lambda) = \det\begin{pmatrix} 8-\lambda & -3 \\ -3 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda(8-\lambda) - 9 = \lambda^2 - 8\lambda - 9 = (\lambda-9)(\lambda+1).$$

Somit sind die Eigenwerte von A gegeben durch 9 und -1, wodurch die Matrix indefinit ist. f hat somit in $(0,0)$ kein lokales Extremum.
Wir stellen zunächst fest, dass f auf D sein Maximum und Minimum annimmt, da D abgeschlossen (betrachte konvergente Folge in D) und beschränkt ($\|(x,y)\| \leqslant 1$) ist. Für die lokalen Extrema auf

$$\tilde{D} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

nutzen wir die Multiplikatorenregel von Lagrange aus. Sei $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $h(x,y) = x^2 + y^2 - 1$, dann ist $h \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ und $\tilde{D} = h^{-1}(\{0\})$ als Urbild der abgeschlossenen Menge $\{0\}$ unter der stetigen Funktion h abgeschlossen. Wegen $\|(x,y)\| = 1$ für $(x,y) \in \tilde{D}$ ist $\tilde{D}$ auch beschränkt, also nach Satz 19.18 kompakt, wodurch f auf $\tilde{D}$ sein Maximum und Minimum annimmt. Es gilt

$$\nabla h(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix},$$

wodurch h' auf ganz $\tilde{D}$ vollen Rang hat, da $(0,0) \notin \tilde{D}$. Für jedes lokale Extremum (x_0, y_0) von f auf $\tilde{D}$ (also $x_0^2 + y_0^2 - 1 = 0$) existiert ein $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ mit

$$f'(x_0, y_0) = -\lambda_0 h'(x_0, y_0),$$

womit sich die Gleichungen

$$8x_0 - 3y_0 = -2\lambda_0 x_0 \tag{10}$$

$$-3x_0 = -2\lambda_0 y_0 \tag{11}$$

ergeben neben

$$x_0^2 + y_0^2 - 1 = 0 \tag{12}$$

Umgeformt ergibt sich aus (10) und (11)

$$(8 + 2\lambda_0)x_0 - 3y_0 = 0 \tag{13}$$

$$x_0 = \frac{2}{3}\lambda_0 y_0 \tag{14}$$

Einsetzen von (14) in (13) liefert

$$\frac{y_0}{3}(4\lambda_0^2 + 16\lambda_0 - 9) = 0$$

Wäre $y_0 = 0$, so nach (14) auch x_0. Dies widerspricht jedoch (12). Somit muss der Klammerausdruck 0 ergeben, was genau für $\lambda_0 \in \{-\frac{9}{2}, \frac{1}{2}\}$ der Fall ist. Einsetzen in (14) und danach in (12) ergibt die vier Punkte

$$(\pm\frac{1}{\sqrt{10}}, \pm\frac{3}{\sqrt{10}}), \qquad (\pm\frac{3}{\sqrt{10}}, \mp\frac{1}{\sqrt{10}}).$$

Durch Einsetzen der Punkte erkennen wir

$$f(\pm\frac{1}{\sqrt{10}}, \pm\frac{3}{\sqrt{10}}) = -\frac{1}{2},$$

$$f(\pm\frac{3}{\sqrt{10}}, \mp\frac{1}{\sqrt{10}}) = \frac{9}{2}.$$

Da f auf $D \setminus \tilde{D}$ keine lokalen Extrema besitzt, ergibt sich schließlich:
Lokale Minima von f auf D: $(\pm\frac{1}{\sqrt{10}}, \pm\frac{3}{\sqrt{10}})$.
Lokale Maxima von f auf D: $(\pm\frac{3}{\sqrt{10}}, \mp\frac{1}{\sqrt{10}})$.

Aufgabe 48 (Tutorium)

Berechnen Sie die globalen Extrema der Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y,z) = 5x + y - 3z$$

für alle $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ auf der Menge

$$E = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x+y+z=0) \wedge (x^2+y^2+z^2=1)\Big\}.$$

Lösungsvorschlag

Sei $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$h(x,y,z) = \begin{pmatrix} x+y+z \\ x^2+y^2+z^2-1 \end{pmatrix}$$

für alle $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Klar: $h \in C^1(\mathbb{R}^3)$. Dann ist $E = h^{-1}(\{0\})$. Da h stetig ist und $\{0\}$ abgeschlossen, ist E abgeschlossen. Wegen $\|(x,y,z)\| = 1$ für jedes $(x,y,z) \in E$, ist E beschränkt. Nach Abschnitt 19.17 der Vorlesung ist also E kompakt. Ebenfalls nach Abschnitt 19.17 der Vorlesung, existieren ein $v_1, v_2 \in E$ mit

$$f(v_1) \leqslant f(v) \leqslant f(v_2)$$

für alle $v \in E$. Damit ist die Existenz der globalen Extrema von f auf E gesichert.
Da jede Stelle eines globalen Extremums auch eine Stelle eines lokalen Extremums ist, bietet es sich an diese mit Hilfe der Multiplikatorenregel von Lagrange (vgl. Abschnitt 19.19 der Vorlesung) zu identifizieren: Es ist

$$h'(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x & 2y & 2z \end{pmatrix}$$

für alle $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Also kann $h'(x,y,z)$ nur für $x=y=z$ nicht den vollen Rang haben. Aber für jedes $(x,y,z) \in E$ gilt $x=y=z \Rightarrow x=y=z=0$, was ein Widerspruch zu $\|(x,y,z)\| = 1$ darstellt. Also hat h' auf E den vollen Rang 2. Es existiert $\lambda_0 = (\lambda_1^0, \lambda_2^0) \in \mathbb{R}^2$ mit

$$f'(v_i) = -\lambda^T h'(v_i)$$

für $i \in \{1,2\}$. Zusammen mit der Nebenbedingung $h(v_i) = 0$, ergibt es die folgenden fünf Gleichungen (für den Zusammenhang der Aussage aus der Vorlesung mit diesen Gleichungen, siehe Lösung von

Aufgabe 40):

$$\begin{aligned} 5 &= -\lambda_1^0 - 2x\lambda_2^0 && (15)\\ 1 &= -\lambda_1^0 - 2y\lambda_2^0 && (16)\\ -3 &= -\lambda_1^0 - 2z\lambda_2^0 && (17)\\ 0 &= x+y+z && (18)\\ 1 &= x^2+y^2+z^2 && (19) \end{aligned}$$

Addition von (15), (16) und (17), sowie Ausnutzung von (18) liefert $3 = -3\lambda_1^0$, also

$$\lambda_1^0 = -1. \tag{20}$$

Einsetzen in (15) impliziert $2 = -x\lambda_2^0$, also $\lambda_2^0 \neq 0$. Einsetzen von (20) in (16) liefert

$$y = 0. \tag{21}$$

Mit (18) folgt dann sofort

$$z = -x. \tag{22}$$

Durch (19) folgt

$$x \in \left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}. \tag{23}$$

Es ist also

$$v_i \in \left\{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}$$

für $i \in \{1,2\}$. Es ist $f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -4\sqrt{2}$ und $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 4\sqrt{2}$, also

$$\begin{aligned} v_1 &= \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right),\\ v_2 &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right). \end{aligned}$$

Hinweis: Es ist hier auch möglich, die erste (oder auch beide) Gleichungen der Nebenbedingungen in die Funktion einzusetzen und damit die Anzahl der zu lösenden Gleichungen zu verkleinern. Ersetzt man zum Beispiel x durch $-y-z$, so arbeitet man mit einer Funktion von zwei Variabeln und einer Gleichung $2y^2+2yz+2z^2 = 1$ als Nebenbedingung, löst das Problem und erhält den x-Wert des minimierenden und maximierenden Punktes durch die Gleichung $x+y+z=0$.

Aufgabe 49 (Übung)

a) Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_\gamma f(x)\,\mathrm{d}s$ für

(i) $r > 0$ und $\gamma : [0,\pi] \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $\gamma(t) := \begin{pmatrix} r\cos t \\ r\sin t \end{pmatrix}$ sowie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y) := \arccos\left(\frac{x}{r}\right) + \frac{y}{r}$.

(ii) $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $\gamma(t) := \begin{pmatrix} \log(1+t^2) \\ 2\arctan(t) - t + 3 \end{pmatrix}$ mit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y) := y\mathrm{e}^{-x}$.

b) Überprüfen Sie jeweils, ob die Funktion v auf ihrem Definitionsbereich eine Stammfunktion besitzt und berechnen Sie diese gegebenenfalls.

(i) $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $v(x,y,z) := \begin{pmatrix} y^2 + 2xz \\ z^2 + 2xy \\ x^2 + 2yz \end{pmatrix}$.

(ii) $v : \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z > 0\} \to \mathbb{R}^3$ mit $v(x,y,z) := \begin{pmatrix} x^2 y \\ ze^x \\ xy\log(z) \end{pmatrix}$.

Lösungsvorschlag

a) (i) Es gilt

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} -r\sin(t) \\ r\cos(t) \end{pmatrix} \qquad \forall t \in [0,\pi].$$

Somit folgt $\|\gamma'(t)\| = r$ für alle $t \in [0,\pi]$ und für das gesuchte Integral ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_\gamma f(x)\,\mathrm{d}s &= \int_0^\pi f(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|\,\mathrm{d}t = r\int_0^\pi \arccos(\cos(t)) + \sin(t)\,\mathrm{d}t \\ &= r[\frac{t^2}{2} - \cos(t)]_{t=0}^\pi = r(\frac{\pi^2}{2} + 2). \end{aligned}$$

(ii) Es gilt

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} \frac{2t}{1+t^2} \\ \frac{2}{1+t^2} - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2t}{1+t^2} \\ \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{pmatrix} \qquad \forall t \in [0,1].$$

Somit folgt $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{\frac{4t^2}{(1+t^2)^2} + \frac{(1-t^2)^2}{(1+t^2)^2}} = \sqrt{\frac{1+2t^2+t^4}{(1+t^2)^2}} = 1$ für alle $t \in [0,1]$ und für das gesuchte Integral folgt

$$\begin{aligned} \int_\gamma f(x)\,\mathrm{d}s &= \int_0^1 f(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|\,\mathrm{d}t = \int_0^1 (2\arctan(t) - t + 3)\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 2\cdot\frac{1}{1+t^2}\arctan(t) - \frac{1}{2}\cdot\frac{2t}{1+t^2} + 3\cdot\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= [(\arctan(t))^2 - \frac{1}{2}\log(1+t^2) + 3\arctan(t)]_{t=0}^1 = \frac{1}{16}(\pi^2 + 12\pi - 8\log(2)). \end{aligned}$$

b) (i) $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $v(x,y,z) := \begin{pmatrix} y^2 + 2xz \\ z^2 + 2xy \\ x^2 + 2yz \end{pmatrix}$ hat auf $\mathbb{R}^3$ die Stammfunktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y,z) = xy^2 + x^2z + yz^2$.

Wir werden diese Stammfunktion nun berechnen. Das folgende Vorgehen ist dabei aber nicht als formal korrekte Rechnung zu verstehen, vielmehr soll es veranschaulichen wie man einen Kandidaten für die Stammfunktion ermittelt. Gesucht ist eine Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass

$$(\operatorname{grad} f)(x,y,z) = \begin{pmatrix} f_1(x,y,z) \\ f_2(x,y,z) \\ f_3(x,y,z) \end{pmatrix}$$

gilt, wobei f_i für $i \in \{1,2,3\}$ die Komponentenfunktionen von v darstellen. Dies schreiben wir in das Gleichungssystem

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = y^2 + 2xz, \tag{24}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = z^2 + 2xy, \tag{25}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = x^2 + 2yz. \tag{26}$$

Integriert man (24) in der x-Variablen, erhält man

$$f(x,y,z) = \int \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)\,\mathrm{d}x = \int y^2 + 2xz\,\mathrm{d}x = xy^2 + x^2 z + c_1(y,z),$$

wobei die Konstante $c_1(y,z)$ von y und z abhängen kann, da wir nur in x integrieren und diesbezüglich y und z als "Konstanten" einzustufen sind. Integrieren wir (25) nach y und (26) nach z erhalten wir

$$f(x,y,z) = xy^2 + c_2(x,z) + yz^2 \quad \text{und} \quad f(x,y,z) = c_3(x,y) + x^2 z + yz^2.$$

An dieser Stelle vergleicht man die drei Gleichungen für $f(x,y,z)$ und wird schnell feststellen, dass

$$c_1(y,z) = yz^2 \quad \text{und} \quad c_2(x,z) = x^2 z \quad \text{und} \quad c_3(x,y) = xy^2$$

eine Möglichkeit ist, diese Gleichungen zu erfüllen. Unser Kandidat lautet daher $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y,z) = xy^2 + x^2 z + yz^2$.
Dann ist $f \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ und für $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$(\operatorname{grad} f)(x,y,z) = \begin{pmatrix} y^2 + 2xz \\ z^2 + 2xy \\ x^2 + 2yz \end{pmatrix} = v(x,y,z).$$

Folglich ist f die gesuchte Stammfunktion.

(ii) Die Funktion $v : D \to \mathbb{R}^3$ mit $D := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z > 0\}$ und $v(x,y,z) := \begin{pmatrix} x^2 y \\ ze^x \\ xy\log(z) \end{pmatrix}$ hat auf D keine Stammfunktion.

D ist ein Gebiet und $f \in C^1(D, \mathbb{R}^3)$. Für $(x,y,z) \in D$ gilt

$$J_v(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2xy & x^2 & 0 \\ ze^x & 0 & e^x \\ y\log(z) & x\log(z) & \frac{xy}{z} \end{pmatrix}$$

und damit ist $J_v(x,y,z)$ nicht symmetrisch und f hat nach Satz 19.21 keine Stammfunktion auf D, da die Integrabilitätsbedingungen nicht erfüllt sind.

Aufgabe 50 (Tutorium)

a) Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_\gamma f(x)\,\mathrm{d}s$ für

(i) $r > 0$ und $\gamma : [0,\pi] \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $\gamma(t) := \begin{pmatrix} r\cos(t) \\ r\sin(t) \end{pmatrix}$ und $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y) := y$.

(ii) $\gamma : [0,\log(5)] \to \mathbb{R}^3$ definiert durch $\gamma(t) := \frac{e^t}{2}\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$ und $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y,z) := x$.

b) Überprüfen Sie jeweils, ob die Funktion v auf ihrem Definitionsbereich eine Stammfunktion besitzt und berechnen Sie diese gegebenenfalls.

(i) $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $v(x,y) := \begin{pmatrix} e^y + \cos(x)\cos(y) \\ xe^y - \sin(x)\sin(y) \end{pmatrix}$.

(ii) $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $v(x,y,z) := \begin{pmatrix} y^2 + 2xyz^3 \\ 2y + x^2z^3 \\ y^2 + 3x^2yz^2 \end{pmatrix}$.

Lösungsvorschlag

a) (i) Es gilt

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} -r\sin(t) \\ r\cos(t) \end{pmatrix} \qquad \forall t \in [0,\pi].$$

Somit folgt $\|\gamma'(t)\| = r$ für alle $t \in [0,\pi]$ und für das gesuchte Integral ergibt sich

$$\int_\gamma f(x)\,\mathrm{d}s = \int_0^\pi f(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|\,\mathrm{d}t = r^2\int_0^\pi \sin(t)\,\mathrm{d}t = r^2[-\cos(t)]_{t=0}^{\pi} = 2r^2.$$

(ii) Es gilt

$$\gamma'(t) = \frac{e^t}{2}\begin{pmatrix} \cos(t) - \sin(t) \\ \sin(t) + \cos(t) \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \qquad \forall t \in [0,\log(5)].$$

Somit folgt $\|\gamma'(t)\| = \frac{e^t}{2}\sqrt{(\cos(t)-\sin(t))^2 + (\sin(t)+\cos(t))^2 + 2} = e^t$ und für das gesuchte Integral ergibt sich

$$\int_\gamma f(x)\,\mathrm{d}s = \int_0^{\log(5)} f(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{\log(5)} e^{2t}\cos(t)\,\mathrm{d}t.$$

Es gilt

$$\int e^{2t}\cos(t)\,\mathrm{d}t \overset{P.I.}{=} e^{2t}\sin(t) - 2\int e^{2t}\sin(t)\,\mathrm{d}t \overset{P.I.}{=} e^{2t}\sin(t) + 2e^{2t}\cos(t) - 4\int e^{2t}\cos(t)\,\mathrm{d}t,$$

wodurch sich

$$\int e^{2t}\cos(t)\,\mathrm{d}t = \frac{e^{2t}}{5}(\sin(t) + 2\cos(t))$$

ergibt, was

$$\int_\gamma f(x)\,\mathrm{d}s = \frac{1}{10}[e^{2t}(\sin(t) + 2\cos(t)]_{t=0}^{\log(5)} = \frac{5}{2}(\sin(\log(5)) + 2\cos(\log(5))) - \frac{1}{5}.$$

b) (i) $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $v(x,y) := \begin{pmatrix} e^y + \cos(x)\cos(y) \\ xe^y - \sin(x)\sin(y) \end{pmatrix}$ hat auf $\mathbb{R}^2$ die Stammfunktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y) := xe^y + \sin(x)\cos(y)$.
Da $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ und für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ gilt, dass

$$(\operatorname{grad} f)(x,y) = \begin{pmatrix} e^y + \cos(x)\cos(y) \\ xe^y - \sin(x)\sin(y) \end{pmatrix} = v(x,y)$$

ist f die gesuchte Stammfunktion. Den Kandidaten für die Stammfunktion findet man mit dem Vorgehen aus Aufgabe 44 **b)** (i).

(ii) $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $v(x,y,z) := \begin{pmatrix} y^2 + 2xyz^3 \\ 2y + x^2z^3 \\ y^2 + 3x^2yz^2 \end{pmatrix}$ hat keine Stammfunktion auf $\mathbb{R}^3$.
$\mathbb{R}^3$ ist ein sternförmiges Gebiet, $f \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ und für $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$J_v(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2yz^3 & 2y + 2xz^3 & 6xyz^2 \\ 2xz^3 & 2 & 3x^2z^2 \\ 6xyz^2 & 2y + 3x^2z^2 & 6x^2yz \end{pmatrix}.$$

Wie man schnell feststellt ist dies keine symmetrische Matrix und daher sind die Integrabilitätsbedingungen auf $\mathbb{R}^3$ nicht erfüllt. Nach Satz 19.21 hat f also keine Stammfunktion.