Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Sebastian Schwarz

SS 2015
18.06.2019

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 9. Übungsblatt

Aufgabe 51 (Übung)

Berechnen Sie jeweils das Kurvenintegral

$$\int_\gamma f(x)\cdot\, \mathrm{d}x.$$

a) $f(x,y)=\begin{pmatrix} e^{xy} \\ xy \end{pmatrix}$, $\gamma:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^2$, $\gamma(t)=\begin{pmatrix}\cos(t)\\ \sin(t)\end{pmatrix}$,

b) $f(x,y)=\begin{pmatrix} 2xy \\ x^2+y^2 \end{pmatrix}$, $\gamma:\left[0,\frac{19}{4}\pi\right]\to\mathbb{R}^2$, $\gamma(t)=\frac{4\sqrt{2}t}{19\pi}\begin{pmatrix}\cos(t)\\ 2\sin(t)\end{pmatrix}$.

Lösungsvorschlag

a) Es gilt nach Definition des Kurvenintegrals:

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(x)\cdot\, \mathrm{d}x &= \int_0^{2\pi} f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi}(e^{\cos(t)\sin(t)},\cos(t)\sin(t))\cdot(-\sin(t),\cos(t))\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi}\cos^2(t)\sin(t)-\sin(t)e^{\cos(t)\sin(t)}\,\mathrm{d}t \\
&= \left[-\frac{1}{3}\cos^3(t)\right]_{t=0}^{t=2\pi} - \int_0^{\pi}\sin(t)e^{\cos(t)\sin(t)}\,\mathrm{d}t - \int_\pi^{2\pi}\sin(t)e^{\cos(t)\sin(t)}\,\mathrm{d}t \\
&\overset{t=\tau+\pi}{=} \left[-\frac{1}{3}\cos^3(t)\right]_{t=0}^{t=2\pi} - \int_0^{\pi}\sin(t)e^{\cos(t)\sin(t)}\,\mathrm{d}t + \int_0^{\pi}\sin(\tau)e^{\cos(\tau)\sin(\tau)}\,\mathrm{d}\tau = 0
\end{aligned}$$

b) Es gilt

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y)=2x=\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y)$$

für alle $x,y\in\mathbb{R}$. Da $\mathbb{R}^2$ einfach zusammenhängend und f ein C^1-Vektorfeld ist, gilt nach Abschnitt 19.25 der Vorlesung, dass f ein Potentialfeld ist. Also hängt der Wert des Integrals nicht von dem konkreten Weg, sondern nur von den Randpunkten ab (19.24). Es ist

$$\gamma(0)=(0,0),\quad \gamma\left(\frac{19}{4}\pi\right)=(-1,2).$$

Wähle also $\tilde\gamma:[0,1]\to\mathbb{R}^2$ mit $\tilde\gamma(t)=t(-1,2)$. Es gilt:

$$\int_\gamma f(x)\cdot\,\mathrm{d}x=\int_{\tilde\gamma} f(x)\cdot\,\mathrm{d}x=\int_0^1 f(\tilde\gamma(t))\cdot\tilde\gamma'(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^1 4t^2+10t^2\,\mathrm{d}t=14\int_0^1 t^2\,\mathrm{d}t=\frac{14}{3}[t^3]_{t=0}^{t=1}=\frac{14}{3}$$

Aufgabe 52 (Tutorium)

Berechnen Sie jeweils das Kurvenintegral

$$\int_\gamma f(x)\cdot\, \mathrm{d}x.$$

a) $f(x,y,z) = e^{-xz}\begin{pmatrix} 2x - x^2z - 5zy^3 \\ 15y^2 \\ -x^3 - 5xy^3 \end{pmatrix}$, $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 - t \\ \sin(\pi t) \end{pmatrix}$,

b) $f(x,y,z) = \begin{pmatrix} y \\ -z \\ x \end{pmatrix}$, $\gamma : [0, \log(2)] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \sinh(t) \\ \cosh(t) \\ \sinh(t) \end{pmatrix}$.

Lösungsvorschlag

a) Es gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y,z) &= -15y^2ze^{-xz} = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y,z) \\
\frac{\partial f_1}{\partial z}(x,y,z) &= (-3x^2 - 5y^3 + x^3z + 5xy^3z)e^{-xz} = \frac{\partial f_3}{\partial x}(x,y,z) \\
\frac{\partial f_2}{\partial z}(x,y,z) &= -15xy^2 = \frac{\partial f_3}{\partial y}(x,y,z)
\end{aligned}$$

für alle $x,y,z \in \mathbb{R}$. Da $\mathbb{R}^3$ einfach zusammenhängend und f ein C^1-Vektorfeld ist, gilt nach Abschnitt 19.25 der Vorlesung, dass f ein Potentialfeld ist. Also hängt der Wert des Integrals nicht von dem konkreten Weg, sondern nur von den Randpunkten ab (19.24). Es ist

$$\gamma(0) = (0,0,0), \quad \gamma(1) = (1,0,0).$$

Wähle also $\tilde{\gamma} : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ mit $\tilde{\gamma}(t) = (t,0,0)$. Es gilt:

$$\int_\gamma f(x)\cdot\, \mathrm{d}x = \int_{\tilde{\gamma}} f(x)\cdot\, \mathrm{d}x = \int_0^1 f(\tilde{\gamma}(t))\cdot\tilde{\gamma}'(t)\, \mathrm{d}t = \int_0^1 2t\, \mathrm{d}t = \left[t^2\right]_{t=0}^{t=1} = 1$$

b) Es gilt nach Definition des Kurvenintegrals:

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(x)\cdot\, \mathrm{d}x &= \int_0^{\log(2)} f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\, \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\log(2)} (\cosh(t), -\sinh(t), \sinh(t))\cdot(\cosh(t), \sinh(t), \cosh(t))\, \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\log(2)} \cosh^2(t) - \sinh^2(t) + \sinh(t)\cosh(t)\, \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\log(2)} 1 + \sinh(t)\cosh(t)\, \mathrm{d}t = \log(2) + \frac{1}{2}\left[\sinh^2(t)\right]_{t=0}^{t=\log(2)} = \log(2) + \frac{9}{32}
\end{aligned}$$

Aufgabe 53 (Übung)

Es sei $I = [0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$ und

$$f(x,y) = x\mathrm{e}^{-y} \text{ für } (x,y) \in I.$$

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ bestimmen die Eckpunkte der Teilintervalle

$$I_{jk}^{(n)} = \left[\tfrac{j}{n}, \tfrac{j+1}{n}\right] \times \left[\tfrac{k}{n}, \tfrac{k+1}{n}\right], \quad j,k = 0,\dots,n-1$$

eine Zerlegung Z_n des Intervalls I.
Berechnen Sie $S_f(Z_n)$ und $s_f(Z_n)$. Berechnen Sie $\int_I f(x,y)d(x,y)$, falls es existiert.

Lösungsvorschlag

Da f stetig ist, existiert das gesuchte Integral laut Vorlesung. Für festes $x \in [0,1]$ ist $y \mapsto f(x,y)$ monoton fallend, für festes $y \in [0,1]$ ist $x \mapsto f(x,y)$ monoton wachsend. Daher nimmt f in $I_{jk}^{(n)}$ sein Maximum im Punkt $(\frac{j+1}{n}, \frac{k}{n})$ und sein Minimum im Punkt $(\frac{j}{n}, \frac{k+1}{n})$. Daher gilt für die Ober- und Untersumme, dass

$$\begin{aligned} S_f(Z_n) &= \sum_{j,k=0}^{n-1} f\Big(\frac{j+1}{n}, \frac{k}{n}\Big)|I_{jk}^{(n)}| = \frac{1}{n^2}\sum_{j,k=0}^{n-1} \frac{j+1}{n}\mathrm{e}^{-\frac{k}{n}} = \frac{1}{n^3}\Bigg(\sum_{j=0}^{n-1} j+1\Bigg)\Bigg(\sum_{k=0}^{n-1}(\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}})^k\Bigg) \\ &= \frac{1}{n^3}\frac{n(n+1)}{2}\frac{1-(\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}})^n}{1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}}} = \frac{(n+1)(1-\frac{1}{\mathrm{e}})}{2n^2(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}})} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2} - \frac{1}{2\mathrm{e}}. \end{aligned}$$

Der Grenzwert ergibt sich aus der Tatsache, dass $\frac{n+1}{n} \to 1$ und $n(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}}) = \frac{\mathrm{e}^0 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{n}}}{0-(-\frac{1}{n})} \to (\mathrm{e}^{\cdot})'(0) = 1$ für $n \to \infty$. Außerdem gilt

$$\begin{aligned} s_f(Z_n) &= \sum_{j,k=0}^{n-1} f\Big(\frac{j}{n}, \frac{k+1}{n}\Big)|I_{jk}^{(n)}| = \frac{1}{n^2}\sum_{j,k=0}^{n-1} \frac{j}{n}\mathrm{e}^{-\frac{k+1}{n}} = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}}}{n^3}\Bigg(\sum_{j=0}^{n-1} j\Bigg)\Bigg(\sum_{k=0}^{n-1}(\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}})^k\Bigg) \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}}}{n^3}\frac{(n-1)n}{2}\frac{1-(\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}})^n}{1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}}} = \frac{(n-1)(1-\frac{1}{\mathrm{e}})}{2n^2(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}})} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2} - \frac{1}{2\mathrm{e}}. \end{aligned}$$

Der Grenzwert ergibt sich wie oben wegen $\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}} \to 1$ für $n \to \infty$. Da die Grenzwerte der Ober- und Untersummen übereinstimmen, folgt aus der Definition des Integrals sowie Satz 20.1 und der darauf folgenden Definition, dass

$$\int_I f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\mathrm{e}}.$$

Dies kann man auch mit Hilfe des Satzes von Fubini nachrechnen:

$$\int_I f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \int_0^1\int_0^1 x\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \Big[\frac{x^2}{2}\mathrm{e}^{-y}\Big]_{x=0}^1\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}[-\mathrm{e}^{-y}]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\mathrm{e}}$$

Aufgabe 54 (Tutorium)

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a) $\int_A (2x+3y)\,\mathrm{d}(x,y)$, $A = [0,2] \times [3,4]$,

b) $\int_B \frac{2z}{(x+y)^2}\,\mathrm{d}(x,y,z)$, $B = [1,2]\times[2,3]\times[0,2]$,

c) $\int_C \frac{2y}{x+y^2}\,\mathrm{d}(x,y)$, $C = [1,2]\times[1,2]$.

Lösungsvorschlag

a) Da der Integrand stetig ist, können wir den Satz von Fubini (20.3) anwenden. Es folgt

$$\begin{aligned}\int_A (2x+3y)\,\mathrm{d}(x,y) &= \int_0^2\int_3^4 (2x+3y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^2 [2xy+\frac{3}{2}y^2]_{y=3}^4\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^2 8x+24-(6x+\frac{27}{2})\,\mathrm{d}x = \int_0^2 2x+\frac{21}{2}\,\mathrm{d}x\\ &= [x^2+\frac{21}{2}x]_0^2 = 4+21 = 25.\end{aligned}$$

b) Da der Integrand stetig ist, können wir den Satz von Fubini (20.3) anwenden. Es folgt

$$\begin{aligned}\int_B \frac{2z}{(x+y)^2}\,\mathrm{d}(x,y,z) &= \int_1^2\int_2^3\int_0^2 \frac{2z}{(x+y)^2}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_1^2\int_2^3\left[\frac{z^2}{(x+y)^2}\right]_{z=0}^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\\ &= \int_1^2\int_2^3 \frac{4}{(x+y)^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_1^2\left[-\frac{4}{x+y}\right]_{y=2}^3\,\mathrm{d}x\\ &= \int_1^2 \frac{4}{x+2}-\frac{4}{x+3}\,\mathrm{d}x = [4\log(x+2)-4\log(x+3)]_1^2\\ &= 4\log(4)-4\log(5)-(4\log(3)-4\log(4)) = 4\log\left(\frac{16}{15}\right).\end{aligned}$$

c) Da der Integrand stetig ist, können wir den Satz von Fubini (20.3) anwenden. Es folgt

$$\begin{aligned}\int_C \frac{2y}{x+y^2}\,d(x,y) &= \int_1^2\left(\int_1^2 \frac{2y}{x+y^2}\,dy\right)dx = \int_1^2\Big[\log(x+y^2)\Big]_{y=1}^{y=2}\,dx\\ &= \int_1^2\Big(\log(x+4)-\log(x+1)\Big)\,dx.\end{aligned}$$

Weil $x\mapsto -x+(x+\alpha)\log(x+\alpha)$ eine Stammfunktion von $x\mapsto\log(x+\alpha)$ ist, folgt

$$\begin{aligned}\int_C \frac{2y}{x+y^2}\,d(x,y) &= \Big[-x+(x+4)\log(x+4)+x-(x+1)\log(x+1)\Big]_{x=1}^{x=2}\\ &= \Big[(x+4)\log(x+4)-(x+1)\log(x+1)\Big]_1^2\\ &= \Big(6\log 6-3\log 3\Big)-\Big(5\log 5-2\log 2\Big)\\ &= 8\log 2+3\log 3-5\log 5.\end{aligned}$$

Aufgabe 55 (Übung)

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a) $\int_A \frac{y}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}(x,y)$, $A = [0,1]^2$,

b) $\int_B xy + y^2 \,\mathrm{d}(x,y)$, $B = [0,1]^2$,

c) $\int_C \cosh(2x+y) \,\mathrm{d}(x,y)$, $C = [-1,0] \times [0,2]$.

Lösungsvorschlag

a) Da der Integrand stetig ist, können wir den Satz von Fubini (20.3) anwenden. Es folgt

$$\begin{aligned}
\int_A \frac{y}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \,\mathrm{d}(x,y) &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{y}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = -\int_0^1 \left[\frac{1}{(1+x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}} \right]_{y=0}^{y=1} \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}} \,\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{1}{(2+x^2)^{\frac{1}{2}}} \,\mathrm{d}x \\
&= [\mathrm{Arsinh}(x)]_{x=0}^{x=1} - \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^1 \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}} \,\mathrm{d}x \\
&\overset{y=\frac{x}{\sqrt{2}}}{=} \mathrm{Arsinh}(1) - \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{(1+y^2)^{\frac{1}{2}}} \,\mathrm{d}y = \mathrm{Arsinh}(1) - [\mathrm{Arsinh}(y)]_{y=0}^{y=\frac{\sqrt{2}}{2}} = \\
&= \mathrm{Arsinh}(1) - \mathrm{Arsinh}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \log\left(1+\sqrt{2}\right) - \log\left(\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right) \\
&= \log\left(\frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}\right)
\end{aligned}$$

b) Da der Integrand stetig ist, können wir den Satz von Fubini (20.3) anwenden. Es folgt

$$\begin{aligned}
\int_B xy + y^2 \,\mathrm{d}(x,y) &= \int_0^1 \int_0^1 xy + y^2 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \int_0^1 [\frac{x^2 y}{2} + xy^2]_{x=0}^1 \,\mathrm{d}y = \int_0^1 \frac{y}{2} + y^2 \,\mathrm{d}y \\
&= [\frac{y^2}{4} + \frac{y^3}{3}]_{y=0}^1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{7}{12}.
\end{aligned}$$

c) Da der Integrand stetig ist, können wir den Satz von Fubini (20.3) anwenden. Es folgt

$$\begin{aligned}
\int_C \cosh(2x+y) \,\mathrm{d}(x,y) &= \int_{-1}^0 \int_0^2 \cosh(2x+y) \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = \int_{-1}^0 [\sinh(2x+y)]_{y=0}^2 \,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-1}^0 \sinh(2x+2) - \sinh(2x) \,\mathrm{d}x = [\frac{1}{2}(\cosh(2x+2) - \cosh(2x))]_{x=-1}^0 \\
&= \frac{1}{2}(\cosh(2) - \cosh(0) - (\cosh(0) - \cosh(-2))) = \cosh(2) - 1.
\end{aligned}$$

Aufgabe 56 (Tutorium)

Berechnen Sie die folgenden Integrale.

a) $\int_A y \sin(xy) \,\mathrm{d}(x,y)$, $A = [0,1] \times [0, \pi/2]$,

b) $\int_B \frac{x^2 z^3}{1+y^2} \,\mathrm{d}(x,y,z)$, $B = [0,1]^3$,

c) $\int_C \sin(x+y+z) \,\mathrm{d}(x,y,z)$, $C = [0,\pi]^3$.

Lösungsvorschlag

a) Da der Integrand stetig ist, können wir den Satz von Fubini (20.3) anwenden. Es folgt

$$\begin{aligned}\int_A y\sin(xy)\,\mathrm{d}(x,y) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 y\sin(xy)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{\pi}{2}}[-\cos(xy)]_{x=0}^1\,\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1-\cos(y)\,\mathrm{d}y\\ &= [y-\sin(y)]_{y=0}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}-1.\end{aligned}$$

b) Da der Integrand stetig ist, können wir den Satz von Fubini (20.3) anwenden. Es folgt

$$\begin{aligned}\int_B \frac{x^2z^3}{1+y^2}\,\mathrm{d}(x,y,z) &= \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{x^2z^3}{1+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^1 z^3\int_0^1\frac{1}{1+y^2}\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\\ &= \int_0^1 z^3\,\mathrm{d}z\int_0^1\frac{1}{1+y^2}\,\mathrm{d}y\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = [\frac{z^4}{4}]_{z=0}^1[\arctan y]_{y=0}^1[\frac{x^3}{3}]_{x=0}^1\\ &= \frac{1}{4}\cdot\arctan(1)\cdot\frac{1}{3} = \frac{\pi}{48}\end{aligned}$$

c) Da der Integrand stetig ist, können wir den Satz von Fubini (20.3) anwenden. Es folgt

$$\begin{aligned}\int_C \sin(x+y+z)\,\mathrm{d}(x,y,z) &= \int_0^\pi\int_0^\pi\int_0^\pi \sin(x+y+z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\\ &= \int_0^\pi\int_0^\pi[-\cos(x+y+z)]_{x=0}^\pi\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^\pi\int_0^\pi\cos(y+z)-\cos(\pi+y+z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\\ &= 2\int_0^\pi\int_0^\pi\cos(y+z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 2\int_0^\pi[\sin(y+z)]_{y=0}^\pi\,\mathrm{d}z\\ &= 2\int_0^\pi\sin(\pi+z)-\sin(z)\,\mathrm{d}z = -4\int_0^\pi\sin(z)\,\mathrm{d}z = 4[\cos(z)]_{z=0}^\pi = -8\end{aligned}$$