

HÖHERE MATHEMATIK II FÜR DIE FACHRICHTUNG PHYSIK

10. ÜBUNGSBLATT

AUFGABE 57 (ÜBUNG)

Bestimmen Sie das Volumen der folgenden Mengen.

- a) $M(f, 0)$, wobei $f : [0, 1] \times [1, \sqrt{3}]$, $f(x, y) = \frac{1}{(x+y^2)^2}$,
- b) $S_n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0 \ (1 \leq i \leq n), x_1 + \dots + x_n \leq 1\}$, $n \in \mathbb{N}$ (n -dimensionaler Standardsimplex).

AUFGABE 58 (TUTORIUM)

Bestimmen Sie das Volumen der folgenden Mengen.

- a) $M(f, g)$, wobei $f, g : [1, 2]^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = e^{x+y}$, $g(x, y) = x^2 y$ (zeigen Sie zunächst, dass $g \leq f$ auf $[1, 2]^2$),
- b) $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq ye^{-x} \leq b, c \leq y \leq e^x \leq d\}$, $0 < a < b < c < d$
- c) $B := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y, z \geq 0, \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \leq 1\}$.

AUFGABE 59 (ÜBUNG)

Berechnen Sie die folgenden Integrale.

- a) $\int_A y^2 \, d(x, y, z)$, $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 \leq y^2 + z^2 \leq |x|\}$,
- b) $\int_B xyz \, d(x, y, z)$, $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq 1, x^2 + y^2 \leq 1\}$,
- c) $\int_0^1 \int_y^1 e^{x^2} \, dx \, dy$.

AUFGABE 60 (TUTORIUM)

Berechnen Sie die folgenden Integrale. Ändern Sie bei c) zunächst die Integrationsreihenfolge.

- a) $\int_A x^2 y z \, d(x, y, z)$, $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq y \leq x, x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 2\}$,
- b) $\int_B z(x^3 + xy^2) \, d(x, y, z)$, $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq \pi, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, |\frac{y}{x}| \leq 1\}$,
- c) $\int_0^1 \int_y^{y^2+1} x^2 y \, dx \, dy$.

AUFGABE 61 (ÜBUNG)

- a) Berechnen Sie das Integral

$$\int_A \sin(z) \, d(x, y, z),$$

$$\text{wobei } A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y, z \geq 0, x + y + 2z \leq 1\},$$

- b) Sei
- $B := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \|(x, y, z)\| \leq 2\}$
- . Eine kugelförmige Gasansammlung besitze die Massendichte

$$\rho(x, y, z) = \begin{cases} \frac{1}{1+x^2+y^2+z^2} & , 0 \leq \|(x, y, z)\| \leq 1, \\ 2 & , 1 < \|(x, y, z)\| \leq 2. \end{cases}$$

Berechnen Sie die gesamte Masse

$$\int_B \rho(x, y, z) \, d(x, y, z)$$

AUFGABE 62 (TUTORIUM)

- a) Berechnen Sie das Integral

$$\int_A (x^2 + y^2)^2 e^{2(1-z)^7} \, d(x, y, z),$$

$$\text{wobei } A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq 1, x^2 + y^2 \leq (1-z)^2\},$$

- b) Bestimmen Sie für
- $a, b, c > 0$
- das Volumen des Ellipsoids

$$E := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 \leq 1\}.$$

AUFGABE 63 (ÜBUNG)

Berechnen Sie das Integral

$$\int_A e^{\frac{x+y}{x-y}} \, d(x, y),$$

wobei $A \subseteq \mathbb{R}^2$ das Trapez mit den Eckpunkten $(1, 0)$, $(2, 0)$, $(0, -2)$ und $(0, -1)$ ist.**AUFGABE 64 (TUTORIUM)**

Es bezeichne $A \subseteq \mathbb{R}^2$ die Menge aller $(x, y) \in [-1, 1] \times \mathbb{R}$ mit $0 \leq y \leq \sqrt{4-4x}$ für $x \geq 0$ bzw. $0 \leq y \leq \sqrt{4+4x}$ für $x < 0$.

- a) Sei $B = [0, 1]^2$ und $g: Q \rightarrow \mathbb{R}^2$, $g(u, v) = (u^2 - v^2, 2uv)$. Zeigen Sie, dass $g(B) = A$.
- b) Berechnen Sie mit Hilfe von a) das Integral $\int_A y \, d(x, y)$.