Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Sebastian Schwarz

SS 2019
27.09.2019

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 10. Übungsblatt

Aufgabe 57 (Übung)

Bestimmen Sie das Volumen der folgenden Mengen.

a) $M(f,0)$, wobei $f:[0,1]\times[1,\sqrt{3}]$, $f(x,y)=\frac{1}{(x+y^2)^2}$,

b) $S_n := \{x\in\mathbb{R}^n \mid x_i \geqslant 0\ (1\leqslant i\leqslant n), x_1+\cdots+x_n\leqslant 1\}$, $n\in\mathbb{N}$ (*n-dimensionaler Standardsimplex*).

Lösungsvorschlag

a) Da f auf seinem Definitionsbereich positiv ist, ist $M(f,0)$ korrekt definiert. Es gilt

$$|M(f,0)| = \int_{[0,1]\times[1,\sqrt{3}]} \frac{1}{(x+y^2)^2}\, \mathrm{d}(x,y).$$

Da f stetig ist, können wir den Satz von Fubini (19.3) verwenden und sehen, dass

$$\begin{aligned}|M(f,0)| &= \int_1^{\sqrt{3}}\int_0^1 \frac{1}{(x+y^2)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_1^{\sqrt{3}} [-\frac{1}{x+y^2}]_{x=0}^1\,\mathrm{d}y = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{y^2}-\frac{1}{1+y^2}\,\mathrm{d}y\\ &= [-\frac{1}{y}-\arctan(y)]_{y=1}^{\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}-\arctan(\sqrt{3})+1+\arctan(1) = 1-\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{\pi}{12},\end{aligned}$$

wobei wir $\arctan(\sqrt{3})=\frac{\pi}{3}$ verwendet haben.

b) Es sei $S_n(a) := \{x\in\mathbb{R}^n \mid x_i\geqslant 0\ (1\leqslant i\leqslant n), x_1+\cdots+x_n\leqslant a\}$ für $0\leqslant a\leqslant 1$. Wir zeigen induktiv (über n), dass $|S_n(a)|=\frac{a^n}{n!}$, womit

$$|S_n| = |S_n(1)| = \frac{1}{n!}$$

folgen würde.
Induktionsanfang ($n=1$): Es gilt $|S_1(a)| = \int_0^a 1\,\mathrm{d}x = a$.
Induktionsschritt ($n\to n+1$): Die Behauptung gelte für ein $n\in\mathbb{N}$ (IV). Es folgt nach dem Prinzip von Cavalieri

$$|S_{n+1}(a)| = \int_0^a |S_n(a-x_{n+1})|\,\mathrm{d}x_{n+1} \overset{(IV)}{=} \int_0^a \frac{(a-x_{n+1})^n}{n!}\,\mathrm{d}x_{n+1} = [-\frac{(a-x_{n+1})^{n+1}}{(n+1)!}]_{x_{n+1}=0}^a = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Dies folgt, da für $x_{n+1}\in[0,a]$ gilt, dass

$$\{x\in\mathbb{R}^n \mid (x,x_{n+1})\in S_{n+1}(a)\} = \{x\in\mathbb{R}^n \mid x_i\geqslant 0\ (i\leqslant 1\leqslant n), x_1+\cdots+x_n\leqslant a-x_{n+1}\} = S_n(a-x_{n+1}).$$

Aufgabe 58 (Tutorium)

Bestimmen Sie das Volumen der folgenden Mengen.

a) $M(f,g)$, wobei $f,g:[1,2]^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \mathrm{e}^{x+y}$, $g(x,y) = x^2y$ (zeigen Sie zunächst, dass $g \leqslant f$ auf $[1,2]^2$),

b) $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leqslant y\mathrm{e}^{-x} \leqslant b, c \leqslant y \leqslant \mathrm{e}^x \leqslant d\}$, $0 < a < b < c < d$

c) $B := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x,y,z \geqslant 0, \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \leqslant 1\}$.

Lösungsvorschlag

a) Die Funktion f ist stetig auf ganz $\mathbb{R}^2$, sodass für jedes $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ gilt (Taylorentwicklung dritten Grades)

$$f(x,y) = 1 + x + y + \frac{x^2 + 2xy + y^2}{2} + \frac{1}{6} \sum_{j_1,j_2,j_3=1}^{2} x_{j_1} x_{j_2} x_{j_3} \mathrm{e}^{\chi_1+\chi_2},$$

wobei $(\chi_1, \chi_2) \in S[(0,0),(x,y)]$ und $x_1 = x$, $x_2 = y$. Dies liegt daran, dass alle partiellen Ableitungen (auch die mehrfachen) von f wieder f entsprechen. Für $(x,y) \in [1,2]^2$ gilt demnach

$$f(x,y) \geqslant \frac{x^2 + 2xy + y^2}{2} \geqslant 2xy \geqslant x^2y = g(x,y)$$

wegen $(x-y)^2 \geqslant 0$, also $x^2 + y^2 \geqslant 2xy$. Somit ist $M(f,g)$ korrekt definiert. Da f und g stetig sind, gilt mit dem Satz von Fubini, dass

$$\begin{aligned}|M(f,g)| &= \int_1^2 \int_1^2 \mathrm{e}^{x+y} - x^2y \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = \int_1^2 [\mathrm{e}^{x+y} - \frac{x^2y^2}{2}]_{y=1}^2 \,\mathrm{d}x = \int_1^2 \mathrm{e}^{x+2} - \mathrm{e}^{x+1} - \frac{3x^2}{2} \,\mathrm{d}x \\ &= [\mathrm{e}^{x+2} - \mathrm{e}^{x+1} - \frac{x^3}{2}]_{x=1}^2 = (\mathrm{e}^4 - \mathrm{e}^3 - 4) - (\mathrm{e}^3 - \mathrm{e}^2 - \frac{1}{2}) = \mathrm{e}^4 - 2\mathrm{e}^3 + \mathrm{e}^2 - \frac{7}{2}.\end{aligned}$$

b) Prinzipiell gilt $c \leqslant y \leqslant d$. Zusätzlich gelten die Restriktionen

$$y \leqslant \mathrm{e}^x \leqslant d \Leftrightarrow \log(y) \leqslant x \leqslant \log(d)$$

und

$$a \leqslant y\mathrm{e}^{-x} \leqslant b \Leftrightarrow \log(y) - \log(b) \leqslant x \leqslant \log(y) - \log(a).$$

<u>1. Fall:</u> $a > 1$. Dann gilt $\log(a) > 0$ und die Restriktionen liefern

$$\log(y) \leqslant x \leqslant \log(y) - \log(a) < \log(y),$$

ein Widerspruch. Somit gilt hier $B = \emptyset$ und $|B| = 0$.
<u>2. Fall:</u> $a \leqslant 1$, $b > 1$. Dann gilt $\log(a) \leqslant 0$ und $\log(b) > 0$.

(i) $\frac{c}{a} \geqslant d$. Die Kombination der Restriktionen liefert

$$\log(y) \leqslant x \leqslant \log(d)$$

und das Prinzip von Cavalieri

$$|B| = \int_c^d \int_{\log(y)}^{\log(d)} 1 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_c^d \log(d) - \log(y) \, \mathrm{d}y = [y\log(d) - y(\log(y) - 1)]_{y=c}^d$$
$$= d + c(\log(\frac{c}{d}) - 1).$$

(ii) $\frac{c}{a} < d$. Die Kombination der Restriktionen liefert

$$\log(y) \leqslant x \leqslant \begin{cases} \log(y) - \log(a) & , y \leqslant da, \\ \log(d) & , y > da. \end{cases}$$

Das Prinzip von Cavalieri liefert

$$|B| = \int_c^{da} \int_{\log(y)}^{\log(y)-\log(a)} 1 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y + \int_{da}^d \int_{\log(y)}^{\log(d)} 1 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$
$$\overset{\text{2. Int s.o. (da statt d)}}{=} -\int_c^{da} \log(a) \, \mathrm{d}y + d + da(\log(a) - 1) = d(1-a) + c\log(a).$$

3. Fall: $b \leqslant 1$. Wieder gibt es die beiden Unterteilungen wie im 2. Fall, in beiden ändert sich lediglich die Untergrenze für x zu $\log(y) - \log(b)$. Es ergibt sich somit

(i) $\frac{c}{a} \geqslant d$.
$$|B| = d + c(\log(\frac{c}{d}) - 1) + (d - c)\log(b).$$

(ii) $\frac{c}{a} < d$.
$$|B| = d(1-a) + c\log(a) + (d - c)\log(b).$$

c) Gilt $(x,y,z) \in B$, so folgt $z \in [0,1]$. Für ein festes solches z gilt

$$Q(z) := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x,y,z) \in B\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x,y \geqslant 0, \ \sqrt{x} + \sqrt{y} \leqslant 1 - \sqrt{z}\}.$$

Somit folgt $y \in [0, (1-\sqrt{z})^2]$. Für ein festes solches y gilt

$$\tilde{Q}(z,y) := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0, \ \sqrt{x} \leqslant 1 - \sqrt{z} - \sqrt{y}\} = [0, (1 - \sqrt{z} - \sqrt{y})^2].$$

Wenden wir also das Prinzip von Cavalieri zwei Mal an, erhalten wir

$$|A| = \int_0^1 |Q(z)| \, \mathrm{d}z = \int_0^1 \int_0^{(1-\sqrt{z})^2} |\tilde{Q}(z,y)| \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z = \int_0^1 \int_0^{(1-\sqrt{z})^2} (1 - \sqrt{z} - \sqrt{y})^2 \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$$
$$= \int_0^1 \int_0^{(1-\sqrt{z})^2} (1-\sqrt{z})^2 - 2(1-\sqrt{z})\sqrt{y} + y \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z = \int_0^1 [(1-\sqrt{z})^2 y - \frac{4}{3}(1-\sqrt{z})y^{3/2} + \frac{y^2}{2}]_{y=0}^{(1-\sqrt{z})^2} \, \mathrm{d}z$$
$$= \frac{1}{6}\int_0^1 (1-\sqrt{z})^4 \, \mathrm{d}z \overset{s=1-\sqrt{z}}{=} -\frac{1}{3}\int_0^1 s^4(s-1) \, \mathrm{d}s = -\frac{1}{3}[\frac{s^6}{6} - \frac{s^5}{5}]_{s=0}^1 = \frac{1}{90}$$

Aufgabe 59 (Übung)

Berechnen Sie die folgenden Integrale.

a) $\int_A y^2 \,\mathrm{d}(x,y,z)$, $A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 \leq y^2 + z^2 \leq |x|\right\}$,

b) $\int_B xyz \,\mathrm{d}(x,y,z)$, $B = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq 1,\, x^2 + y^2 \leq 1\right\}$,

c) $\int_0^1 \int_y^1 \mathrm{e}^{x^2} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$.

Lösungsvorschlag

a) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $x^2 \leq |x| \Leftrightarrow |x| \leq 1$. Deshalb folgt mit dem Satz von Fubini (Satz 20.3):

$$\int_A y^2 \,\mathrm{d}(x,y,z) = \int_{-1}^1 \int_{A_x} y^2 \,\mathrm{d}(y,z) \,\mathrm{d}x$$

mit

$$A_x = \left\{(y,z) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y^2 + z^2 \leq |x|\right\}.$$

Einführen von Polarkoordinaten für y, z liefert

$$\int_{A_x} y^2 \,\mathrm{d}yz = \int_0^{2\pi} \int_{|x|}^{\sqrt{|x|}} r^2 \sin^2(\varphi) r \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\varphi = \pi \frac{1}{4} \left[r^4\right]_{r=|x|}^{r=\sqrt{|x|}} = \frac{\pi}{4}\left(x^2 - x^4\right)$$

für alle $x \in [-1,1]$. Da nun im Integranden nur gerade Potenzen von x vorkommen, folgt:

$$\int_A y^2 \,\mathrm{d}(x,y,z) = 2\int_0^1 \frac{\pi}{4}\left(x^2 - x^4\right) \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^1 \left(x^2 - x^4\right) \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{\pi}{15}$$

b) Mit Hilfe der Zylinderkoordinaten ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\int_B xyz \,\mathrm{d}(x,y,z) &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^1 r\cos(\varphi) r \sin(\varphi) z r \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}z \\
&= \int_0^1 z \,\mathrm{d}z \cdot \int_0^{2\pi} \cos(\varphi)\sin(\varphi) \,\mathrm{d}\varphi \cdot \int_0^1 r^3 \,\mathrm{d}r = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\left[\sin^2(\varphi)\right]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \cdot \frac{1}{4} = 0
\end{aligned}$$

c) Es gilt nach dem Satz von Fubini (Satz 20.3):

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_y^1 \mathrm{e}^{x^2} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y &= \int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{x^2} \mathbb{1}_{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\, 0 \leq y \leq x \leq 1\}}(x,y) \,\mathrm{d}(x,y) = \int_0^1 \int_0^x \mathrm{e}^{x^2} \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = \int_0^1 x\mathrm{e}^{x^2} \,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\left[\mathrm{e}^{x^2}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{\mathrm{e}-1}{2}
\end{aligned}$$

Aufgabe 60 (Tutorium)

Berechnen Sie die folgenden Integrale. Ändern Sie bei **c)** zunächst die Integrationsreihenfolge.

a) $\int_A x^2 yz \,\mathrm{d}(x,y,z)$, $A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq y \leq x,\, x^2 + y^2 \leq 1,\, 0 \leq z \leq 2\right\}$,

b) $\int_B z(x^3 + xy^2) \,\mathrm{d}(x,y,z)$, $B = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq \pi,\, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4,\, |\frac{y}{x}| \leq 1\right\}$,

c) $\int_0^1 \int_y^{y^2+1} x^2 y \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$.

Lösungsvorschlag

a) Es gilt nach dem Satz von Fubini (Satz 20.3)

$$\int_A x^2yz \,\mathrm{d}(x,y,z) = \int_0^2 z \int_{A'} x^2y \,\mathrm{d}(x,y)\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\left[z^2\right]_{z=0}^{z=2} \int_{A'} x^2y\,\mathrm{d}(x,y) = 2\int_{A'} x^2y\,\mathrm{d}(x,y)$$

mit

$$A' = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0 \le y \le x,\, x^2+y^2 \le 1\right\}.$$

Einführen von Polarkoordinaten für x, y liefert:

$$\begin{aligned}\int_{A'} x^2y\,\mathrm{d}(x,y) &= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^1 r^2\cos^2(\varphi) r\sin(\varphi) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = \int_0^1 r^4\,\mathrm{d}r \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2(\varphi)\sin(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi \\ &= \frac{1}{5}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\left[\cos^3(\varphi)\right]_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{15}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)\end{aligned}$$

Insgesamt also:

$$\int_A x^2yz\,\mathrm{d}(x,y,z) = \frac{2}{15}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$$

b) Mit Hilfe der Zylinderkoordinaten ergibt sich

$$\begin{aligned}\int_B z(x^3+xy^2)\,\mathrm{d}(x,y,z) &= \int_0^\pi z\int_1^2 r^3\left(\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cos(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi + \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}\cos(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi\right) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z \\ &= \frac{\pi^2}{2}\cdot\frac{31}{5}\cdot\left(\sqrt{2}-\sqrt{2}\right) = 0\end{aligned}$$

c) Es ist

$$\begin{aligned} C &:= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le y\le 1,\, y\le x\le y^2+1\right\} \\ &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : ((0\le x\le 1)\vee(1<x\leqslant 2))\wedge(0\le y\le 1)\wedge(y\le x\le y^2+1)\right\} \\ &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : ((0\le y\le x\le 1)\vee((1<x\le 2)\wedge(\sqrt{x-1}<y\le 1))\right\} \\ &= \underbrace{\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le y\le x\le 1\right\}}_{=C_1}\cup\underbrace{\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (1<x\le 2)\wedge(\sqrt{x-1}<y\le 1)\right\}}_{=C_2}\end{aligned}$$

Ferner ist $C_1\cap C_2=\emptyset$. Es folgt mit dem Satz von Fubini (Satz 20.3):

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_y^{y^2+1} x^2y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_C x^2y\,\mathrm{d}(x,y) = \int_{C_1} x^2y\,\mathrm{d}(x,y) + \int_{C_2} x^2y\,\mathrm{d}(x,y) \\ &= \int_0^1\int_0^x x^2y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_1^2\int_{\sqrt{x-1}}^1 x^2y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1\frac{x^4}{2}\,\mathrm{d}x + \int_1^2 x^2\frac{1-(x-1)}{2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{10}+\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{8}\right]_{x=1}^{x=2} = \frac{1}{10}+\frac{8}{3}+\frac{1}{8}-\frac{1}{3}-2 = \frac{67}{120}\end{aligned}$$

Alternativ lässt sich das Integral auch direkt berechnen, ohne die Integrationsreihenfolge umzudrehen.

Aufgabe 61 (Übung)

a) Berechnen Sie das Integral

$$\int_A \sin(z)\, \mathrm{d}(x,y,z),$$

wobei $A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x,y,z \geq 0,\, x+y+2z \leq 1\right\}$,

b) Sei $B := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \|(x,y,z)\| \leqslant 2\}$. Eine kugelförmige Gasansammlung besitze die Massendichte

$$\rho(x,y,z) = \begin{cases} \frac{1}{1+x^2+y^2+z^2} & ,0 \leqslant \|(x,y,z)\| \leqslant 1, \\ 2 & ,1 < \|(x,y,z)\| \leqslant 2. \end{cases}$$

Berechnen Sie die gesamte Masse

$$\int_B \rho(x,y,z)\, \mathrm{d}(x,y,z)$$

Lösungsvorschlag

a) Es gilt nach dem Satz von Fubini (Satz 20.3):

$$\begin{aligned}
\int_A \sin(z)\, \mathrm{d}(x,y,z) &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{\frac{1-x-y}{2}} \sin(z)\, \mathrm{d}z\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x = -\int_0^1 \int_0^{1-x} [\cos(z)]_{z=0}^{z=\frac{1-x-y}{2}}\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-x} 1 - \cos\left(\frac{1-x-y}{2}\right) \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x = \int_0^1 (1-x) + 2\left[\sin\left(\frac{1-x-y}{2}\right)\right]_{y=0}^{y=1-x} \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 (1-x) - 2\sin\left(\frac{1-x}{2}\right) \mathrm{d}x = \frac{1}{2} - 4\left[\cos\left(\frac{1-x}{2}\right)\right]_{x=0}^{x=1} = -\frac{7}{2} + 4\cos\left(\frac{1}{2}\right)
\end{aligned}$$

b) Definiere $K := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leqslant 1\}$ und $S := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 2\}$. Dann gilt $B = K \cup S$ und $K \cap S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1\}$. Anhand von Kugelkoordinaten sieht man sofort, dass

$$\int_{K\cap S} \rho(x,y,z)\, \mathrm{d}(x,y,z) = 0,$$

womit nach Satz 20.5 folgt, dass

$$\begin{aligned}
\int_B \rho(x,y,z)\, \mathrm{d}(x,y,z) &= \int_K \rho(x,y,z)\, \mathrm{d}(x,y,z) + \int_S \rho(x,y,z)\, \mathrm{d}(x,y,z) \\
&= \int_0^1 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \frac{r^2}{1+r^2} \cos(\vartheta)\, \mathrm{d}\varphi\, \mathrm{d}\vartheta\, \mathrm{d}r + \int_1^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} 2r^2 \cos(\vartheta)\, \mathrm{d}\varphi\, \mathrm{d}\vartheta\, \mathrm{d}r \\
&= 4\pi \int_0^1 1 - \frac{1}{1+r^2}\, \mathrm{d}r + \frac{56}{3}\pi = 4\pi[r - \arctan(r)]_{r=0}^1 + \frac{56}{3}\pi \\
&= 4\pi - \pi^2 + \frac{56}{3}\pi = \frac{68}{3}\pi - \pi^2.
\end{aligned}$$

Aufgabe 62 (Tutorium)

a) Berechnen Sie das Integral

$$\int_A (x^2+y^2)^2 \mathrm{e}^{2(1-z)^7}\, \mathrm{d}(x,y,z),$$

wobei $A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq 1,\, x^2+y^2 \leq (1-z)^2\right\}$,

b) Bestimmen Sie für $a,b,c>0$ das Volumen des Ellipsoids

$$E := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 \leqslant 1\}.$$

Lösungsvorschlag

a) Mit Hilfe der Zylinderkoordinaten ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\int_A (x^2+y^2)^2 \mathrm{e}^{2(1-z)^7}\, \mathrm{d}(x,y,z) &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{1-z} r^4 \mathrm{e}^{2(1-z)^7} r \,\mathrm{d}r\, \mathrm{d}\varphi\, \mathrm{d}z \\
&= 2\pi \int_0^1 \mathrm{e}^{2(1-z)^7} \left[\frac{r^6}{6}\right]_{r=0}^{r=1-z} \mathrm{d}z = \frac{\pi}{3} \int_0^1 \mathrm{e}^{2(1-z)^7} (1-z)^6 \,\mathrm{d}z \\
&\overset{x=1-z}{=} \frac{\pi}{3} \int_0^1 \mathrm{e}^{2x^7} x^6 \,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{14} \cdot \left[\mathrm{e}^{2x^7}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{\pi}{42}(\mathrm{e}^2 - 1)
\end{aligned}$$

b) Wir benutzen die Substitutionsregel mit der Funktion

$$g(u,v,w) = (au, bv, cw) \qquad \forall (u,v,w) \in \mathbb{R}^3.$$

Diese Funktion ist offensichtlich injektiv und stetig differenzierbar mit

$$g'(u,v,w) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix},$$

also $\det g'(u,v,w) = abc > 0$. Mit $K := \{(u,v,w) \in \mathbb{R}^3 \mid u^2+v^2+w^2 \leqslant 1\}$ gilt $g(K) = E$, denn

$$(u,v,w) \in K \Leftrightarrow \left(\frac{au}{u}\right)^2 + \left(\frac{bv}{v}\right)^2 + \left(\frac{cw}{w}\right)^2 \leqslant 1 \Leftrightarrow (au,bv,cw) = g(u,v,w) \in E.$$

Daher liefert die Substitutionsregel

$$|E| = \int_E 1 \,\mathrm{d}(x,y,z) = abc \int_K 1 \,\mathrm{d}(x,y,z) = abc|K|.$$

Das Volumen von K erhalten wir über die Verwendung von Kugelkoordinaten.

$$|K| = \int_0^1 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} r^2 \cos(\vartheta)\, \mathrm{d}\varphi\, \mathrm{d}\vartheta\, \mathrm{d}r = \frac{4\pi}{3},$$

womit $|E| = \frac{4\pi}{3} abc$ folgt.

AUFGABE 63 (ÜBUNG)

Berechnen Sie das Integral

$$\int_A e^{\frac{x+y}{x-y}} \, d(x,y),$$

wobei $A \subseteq \mathbb{R}^2$ das Trapez mit den Eckpunkten $(1,0)$, $(2,0)$, $(0,-2)$ und $(0,-1)$ ist.

LÖSUNGSVORSCHLAG

Wir definieren $g(u,v) = (\frac{1}{2}(u+v), \frac{1}{2}(u-v))$, da mit $f(x,y) = e^{\frac{x+y}{x-y}}$ dann $f(g(u,v)) = e^{\frac{u}{v}}$. Ist

$$B := \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leqslant v \leqslant 2, -v \leqslant u \leqslant v\},$$

so gilt wegen

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0, y \leqslant 0, x-y \in [1,2]\},$$

dass $g(B) = A$. Ist $(u,v) \in B$, so folgt $u + v \geqslant -v + v = 0$ und $u - v \leqslant v - v = 0$ sowie $\frac{1}{2}(u+v) - \frac{1}{2}(u-v) = v \in [1,2]$, also $g(u,v) \in A$. Ist $(x,y) \in A$, so gilt $(x+y, x-y) \in B$ und $g(x+y, x-y) = (x,y)$. Außerdem ist g injektiv, denn aus $(\frac{1}{2}(u+v), \frac{1}{2}(u-v)) = (\frac{1}{2}(\tilde{u}+\tilde{v}), \frac{1}{2}(\tilde{u}-\tilde{v}))$ folgt durch addieren bzw. subtrahieren der beiden Gleichungen sofort $u = \tilde{u}$ und $v = \tilde{v}$. Die Substitutionsregel liefert wegen

$$g'(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

also $\det g'(u,v) = -\frac{1}{2}$, dass

$$\begin{aligned} \int_A e^{\frac{x+y}{x-y}} \, d(x,y) &= \frac{1}{2} \int_B e^{\frac{u}{v}} \, d(u,v) = \frac{1}{2} \int_1^2 \int_{-v}^{v} e^{\frac{u}{v}} \, du \, dv = \frac{1}{2} \int_1^2 [v e^{\frac{u}{v}}]_{u=-v}^{v} \, dv \\ &= \frac{1}{2} \int_1^2 v(e - e^{-1}) \, dv = \frac{3}{4}(e - e^{-1}). \end{aligned}$$

AUFGABE 64 (TUTORIUM)

Es bezeichne $A \subseteq \mathbb{R}^2$ die Menge aller $(x,y) \in [-1,1] \times \mathbb{R}$ mit $0 \leqslant y \leqslant \sqrt{4-4x}$ für $x \geqslant 0$ bzw. $0 \leqslant y \leqslant \sqrt{4+4x}$ für $x < 0$.

a) Sei $B = [0,1]^2$ und $g : Q \to \mathbb{R}^2$, $g(u,v) = (u^2 - v^2, 2uv)$. Zeigen Sie, dass $g(B) = A$.

b) Berechnen Sie mit Hilfe von **a)** das Integral $\int_A y d(x,y)$.

LÖSUNGSVORSCHLAG

a) Indem man die Gleichungen $0 \leqslant y \leqslant \sqrt{4-4x}$ und $0 \leqslant y \leqslant \sqrt{4+4x}$ nach x auflöst, sieht man, dass A von den Parabeln $x = 1 - \frac{y^2}{4}$ und $x = \frac{y^2}{4} - 1$ (für $0 \leqslant 2 \leqslant y$ sowie dem Segment von $(-1,0)$ nach $(1,0)$ berandet wird.

Ist $(u,v) \in B$, so gilt $2uv \in [0,2]$ sowie $1 - \frac{(2uv)^2}{4} = 1 - u^2v^2 \geqslant |u^2 - v^2|$ (für $u \geqslant v$ wegen $(1+v^2)(1-u^2) \geqslant 0$, für $u < v$ wegen $(1-v^2)(1+u^2) \geqslant 0$). Deshalb gilt $g(u,v) \in A$. Ist $(x,y) \in A$ mit $y \neq 0$, so gilt

$$\left(\frac{y}{\sqrt{2(\sqrt{x^2+y^2}-x)}}, \sqrt{\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{2}}\right) \in B.$$

Dass beide Komponenten positiv sind, ist klar. Zudem gilt

$$\begin{aligned}\frac{y}{\sqrt{2(\sqrt{x^2+y^2}-x)}} \leqslant 1 &\Leftrightarrow y^2 + 2x \leqslant 2\sqrt{x^2+y^2} \\ &\Leftarrow y^2 \leqslant 4 - 4x,\end{aligned}$$

was erfüllt ist. Schließlich gilt ebenso

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{2}} \leqslant 1 &\Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2} \leqslant 2 + x \\ &\Leftarrow y^2 \leqslant 4 + 4x,\end{aligned}$$

was ebenfalls erfüllt ist. Wegen $g(\frac{y}{\sqrt{2(\sqrt{x^2+y^2}-x)}}, \sqrt{\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{2}}) = (x,y)$ haben wir ein Urbild von (x,y) in B gefunden. Für $(x,y) \in A$ mit $y = 0$ ist das gesuchte Urbild entweder $(\sqrt{x}, 0)$ (für $x \geqslant 0$) oder $(0, \sqrt{-x})$ (für $x < 0$), die beide ebenfalls wieder in B liegen.
Da man beim Finden des Urbildes oben bemerkt, dass die gegebenen Kandidaten die einzig möglichen sind, ist die Injektivität von g ebenfalls gezeigt.

b) Wir berechnen

$$g'(u,v) = \begin{pmatrix} 2u & -2v \\ 2v & 2u \end{pmatrix},$$

womit $\det g'(u,v) = 4(u^2+v^2) > 0$ für alle $(u,v) \in B \setminus \{(0,0)\}$. Die Substitutionsregel liefert nun

$$\begin{aligned}\int_A y \, \mathrm{d}(x,y) &= \int_B 2uv \cdot 4(u^2+v^2) \, \mathrm{d}(u,v) = 8 \int_0^1 \int_0^1 u^3 v + uv^3 \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v \\ &= 8 \int_0^1 [\frac{u^4 v}{4} + \frac{u^2 v^3}{2}]_{u=0}^1 \, \mathrm{d}v = \int_0^1 2v + 4v^3 \, \mathrm{d}v = [v^2 + v^4]_{v=0}^1 = 2\end{aligned}$$