

HÖHERE MATHEMATIK II FÜR DIE FACHRICHTUNG PHYSIK

11. ÜBUNGSBLATT

AUFGABE 65 (ÜBUNG)

Es sei $0 < r < R$. Berechnen Sie die Oberfläche des Rotationstoruses

$$\mathbb{T}_r^R = \{((R + r \cos(\vartheta)) \cos(\varphi), (R + r \cos(\vartheta)) \sin(\varphi), r \sin(\vartheta)) : \varphi, \vartheta \in [0, 2\pi)\}.$$

AUFGABE 66 (TUTORIUM)

a) Berechnen Sie den Flächeninhalt von

$$\mathcal{F} = \{(x, y, \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}) \in \mathbb{R}^3 \mid (x - \frac{r}{2})^2 + y^2 \leq \frac{r^2}{4}\}$$

b) Es sei D das Dreieck mit den Eckpunkten $(0, 0)$, $(1, 0)$ und $(0, 1)$ und γ eine Kurve, die den Rand von D ein Mal im Gegenuhrzeiger Sinn durchläuft. Das Vektorfeld $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ sei durch

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 + xy \\ x^2y - y^2 \end{pmatrix}$$

gegeben. Berechnen Sie das Integral

$$\int_{\gamma} f(x, y) \cdot d(x, y)$$

(i) direkt und

(ii) mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes.

AUFGABE 67 (ÜBUNG)

Es sei Γ die positiv orientierte, einfache Kurve, welche durch Schneiden des Zylinders $Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$ mit der Ebene $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1\}$ entsteht. Bestimmen Sie das Kurvenintegral

$$\int_{\Gamma} (-y^3, x^3, -z^3) \cdot d(x, y, z)$$

a) direkt und

b) mit Hilfe des Integralsatzes von Stokes.

AUFGABE 68 (TUTORIUM)

Es sei $\mathcal{F}_0 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z > 0\}$ und $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$f(x, y, z) = (1, xz, xy)$$

für alle $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Berechnen Sie das Oberflächenintegral

$$\int_{\mathcal{F}_0} f \cdot d\mathbf{o}$$

- a) direkt und
- b) mit Hilfe des Integralsatzes von Stokes.

AUFGABE 69 (ÜBUNG)

- a) Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Stetigkeit, das Erfüllen der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen, reelle bzw. komplexe Differenzierbarkeit sowie Holomorphie. Geben Sie, dort wo sie existiert, die Ableitung f' an.

$$(i) \quad f(z) = z \operatorname{Re} z, \quad (ii) \quad f(z) = \begin{cases} \frac{z^2}{|z|}, & z \neq 0, \\ 0, & z = 0. \end{cases}$$

- b) Sei $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph auf $\mathbb{C}$. Zeigen Sie: Ist $\operatorname{Re} f$, $\operatorname{Im} f$ oder $|f|$ konstant auf $\mathbb{C}$, so ist f konstant auf $\mathbb{C}$.

Hinweis: Sie dürfen benutzen, dass aus $(\operatorname{Re} f)' \equiv 0$ bzw. $(\operatorname{Im} f)' \equiv 0$ auf $\mathbb{C}$ folgt, dass $\operatorname{Re} f$ bzw. $\operatorname{Im} f$ konstant auf $\mathbb{C}$ ist.

AUFGABE 70 (TUTORIUM)

- a) Sei f eine auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion mit $(\operatorname{Im} f)(z) = \cos(x) \sinh(y)$ für $z = x + iy$ und $f(0) = 0$. Bestimmen Sie $\operatorname{Re} f$. Betrachten Sie die Funktionswerte von f auf der reellen Achse, um eine Vermutung über den Ursprung dieser Funktion anzustellen.

- b) Berechnen Sie die folgenden Wegintegrale.

- (i) $\int_{\gamma} z \operatorname{Re} z \, dz$, wobei γ der Weg von 0 nach $1 + i$ auf der Parabel $\{\operatorname{Im} z = (\operatorname{Re} z)^2\}$ ist,
- (ii) $\int_{\gamma} |z|^2 \, dz$, wobei γ den Rand des Dreiecks mit Eckpunkten 0, 1 und i ein Mal gegen den Uhrzeigersinn durchläuft,
- (iii) $\int_{\gamma} \bar{z}^2 \, dz$, wobei $\gamma(t) = e^{it} \sin(t)$ für $t \in [0, T]$ mit $T > 0$ so, dass $L(\gamma) = \pi/2$.

Erinnerung: Die Übungsklausur findet am **06.07.2019** von **9 bis 11 Uhr** im **Benz-Hörsaal** statt.