

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

1. Übungsblatt

Aufgabe 1 (Übung)

Seien $m, n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ und $(\cdot|\cdot)$ das Standardskalarprodukt im $\mathbb{K}^m$.

a) Zeigen Sie, dass

$$\text{Bild}(A)^\perp = \text{Kern}(A^*).$$

b) Sei nun $m = n$ und $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Zeigen Sie:

$$A \text{ ist selbstadjungiert, d.h., } A = A^*. \iff (Av|v) \in \mathbb{R} \text{ für alle } v \in \mathbb{C}^n.$$

Seien nun $(V, (\cdot|\cdot))$ ein beliebiger Skalarproduktraum und $M, N \subseteq V$ Untervektorräume von V .

c) Zeigen Sie $(M + N)^\perp = M^\perp \cap N^\perp$.

d) Sei nun zusätzlich $\dim(M) < \infty$. Zeigen Sie

$$(M^\perp)^\perp = M.$$

Hinweis: Zeigen Sie die Mengengleichheit durch doppelte Inklusion. Nutzen Sie $V = M \oplus M^\perp$ (vgl. Satz 15.8) für den Nachweis der Inklusion $\subseteq$.

Aufgabe 2 (Tutorium)

Sei V ein $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit Skalarprodukt $(\cdot|\cdot)$.

a) Seien Vektoren $v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_m \in V$ und Skalare $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_m \in \mathbb{K}$ ($n, m \in \mathbb{N}$) gegeben. Zeigen Sie, dass

$$\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \middle| \sum_{j=1}^m \beta_j w_j \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_i \overline{\beta_j} (v_i | w_j).$$

Seien nun $n \in \mathbb{N}$ und $\{u_1, \dots, u_n\} \subseteq V$ eine Orthonormalbasis von V . Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

b) Es gilt $(v|w) = \sum_{i=1}^n (v|u_i) \overline{(w|u_i)}$ für alle $v, w \in V$.

c) Es gilt $\|v\|^2 = \sum_{i=1}^n |(v|u_i)|^2$ für alle $v \in V$.

Aufgabe 3 (Übung)

Sei $(V, (\cdot|\cdot))$ ein Skalarproduktraum über $\mathbb{K}$ mit Norm $\|v\| := (v|v)^{\frac{1}{2}}$, $v \in V$. Wie aus Satz 14.23, HM I, bekannt ist, gilt dann die *Parallelogrammidentität*, d.h., für $u, v \in V$ gilt

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2). \quad (*)$$

- a) Sei nun $V = C([0, 1]) := \{f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ist stetig}\}$. Für $f \in V$ definieren wir $\|f\| := \max_{x \in [0, 1]} |f(x)|$.
- (i) Zeigen Sie, dass $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum ist.
 - (ii) Zeigen Sie mit Hilfe der Parallelogrammidentität, dass $(V, \|\cdot\|)$ kein Skalarproduktraum sein kann.
- b) Zeigen Sie die Umkehrung von a) (vgl. Satz 14.24, HM I): Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum über $\mathbb{K}$, sodass die Parallelogrammidentität $(*)$ gilt. Zeigen Sie, dass dann ein Skalarprodukt $(\cdot|\cdot)$ auf V existiert, sodass $\|v\| = (v|v)^{\frac{1}{2}}$ für alle $v \in V$ gilt.

Gehen Sie hierfür in mehreren Schritten vor:

- (1) Betrachten Sie zunächst den Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und definieren Sie

$$\langle u|v \rangle := \frac{1}{4}(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2) \quad \text{für } u, v \in V.$$

Machen Sie sich klar, dass $\|u\| = \langle u, u \rangle^{\frac{1}{2}}$ für alle $u \in V$ gilt. Damit ist auch $\langle \cdot, \cdot \rangle$ insbesondere positiv. Wir weisen nun in mehreren Schritten nach, dass $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf V ist.

- (i) Zeigen Sie $\langle u|v \rangle = \langle v|u \rangle$ und $\langle u|2v \rangle = 2\langle u|v \rangle$ für alle $u, v \in V$.
 - (ii) Zeigen Sie, $\langle u+v, w \rangle = \langle u|w \rangle + \langle v|w \rangle$ für alle $u, v, w \in V$.
 - (iii) Folgern Sie aus (ii), dass $\langle \lambda u|v \rangle = \lambda \langle u|v \rangle$ für alle $\lambda \in \mathbb{Q}$ und $u, v \in V$.
 - (iv) Zeigen Sie, dass für feste $u, v \in V$ die Abbildung $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \langle tu, v \rangle$ stetig ist.
 - (v) Folgern Sie aus (iii) und (iv), dass $\langle \lambda u|v \rangle = \lambda \langle u|v \rangle$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$, und $u, v \in V$.
- (2) Sei nun $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Wir definieren

$$(u|v) := \langle u|v \rangle + i\langle u|iv \rangle \quad \text{für } u, v \in V,$$

wobei $\langle \cdot|\cdot \rangle$ so definiert ist wie in (1). Zeigen Sie, dass $(\cdot|\cdot)$ ein Skalarprodukt auf V definiert mit $\|v\| = (v|v)^{\frac{1}{2}}$ für alle $v \in V$.

Aufgabe 4 (Tutorium)

Hinweis: In Satz 15.2 (Gram-Schmidt-Verfahren) hat sich ein kleiner Fehler eingeschlichen. Es muss

$$c_k := v_k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{(v_k|c_j)}{\|c_j\|^2} c_j \quad (k = 2, \dots, n)$$

heißen.

- a) Berechnen Sie eine Orthonormalbasis von $U = \text{lin}(\{u_1, u_2, u_3\}) \subseteq \mathbb{R}^4$ und berechnen Sie $d(v, U) := \min_{u \in U} \|v - u\|$ mit

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

- b) Sei $V = C([-1, 1])$ ausgestattet mit dem Skalarprodukt $(f|g) = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$, $f, g \in V$, und $U = \text{lin}(\{p_0, p_1, p_2\})$, $p_i: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, p_i(x) = x^i, i = 0, 1, 2$, der Untervektorraum der Polynomfunktionen des Grades ≤ 2 . Berechnen Sie mithilfe des Gram-Schmidt-Verfahrens eine Orthonormalbasis von U .

Aufgabe 5 (Übung)

Es sei $(G, \odot)$ eine Gruppe. Seien ferner (G1), (G2) und (G3) die Gruppenaxiome aus der Vorlesung (vgl. Seite 7, Skript). Zeigen Sie:

- Das Element e in (G2) ist eindeutig bestimmt.
- Sind $a, b \in G$ wie in (G3), so ist b durch a eindeutig bestimmt. (Wir schreiben $a^{-1} := b$).
- Sind $a, b \in G$ gegeben, so gibt es ein eindeutiges Element $x \in G$ mit $a \odot x = b$.

Zusatz: Im Folgenden zeigen Sie, dass man die Gruppenaxiome abschwächen kann.

Es sei G eine nichtleere Menge versehen mit einer Verknüpfung $\odot: G \times G \rightarrow G$. Ferner definieren wir die Aussagen (G2') und (G3') durch

- (G2') Es existiert ein $e \in G$, sodass $e \odot a = a$ für alle $a \in G$ gilt (*linksneutrales Element*),
- (G3') Für alle $a \in G$ existiert ein $b \in G$, sodass $b \odot a = e$ (*linksinverses Element*).

Zeigen Sie:

$$(G, \odot) \text{ erfüllt (G1), (G2'), (G3')}. \iff (G, \odot) \text{ ist eine Gruppe.}$$

Aufgabe 6 (Tutorium)

Seien $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n < m$. Wir betrachten für $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$, $y \in \mathbb{K}^m$ die Gleichung

$$Ax = y.$$

- Machen Sie sich klar, dass es im Allgemeinen keine Lösung $x \in \mathbb{K}^n$ gibt.
- In Anbetracht von a) formulieren wir das *lineare Ausgleichsproblem*: Finde $x_0 \in \mathbb{K}^n$, sodass

$$\|y - Ax_0\| = \min_{x \in \mathbb{K}^n} \|y - Ax\|. \quad (*)$$

Zeigen Sie: Es existiert $x_0 \in \mathbb{K}^n$, das (*) erfüllt. Weiterhin gilt für $x_0 \in \mathbb{K}^n$ die Äquivalenz:

$$x_0 \text{ erfüllt } (*) \iff A^*Ax_0 = A^*y.$$

Hinweis: Nutzen Sie den Projektionssatz (Satz 15.8) mit $V = \mathbb{K}^m$ und $U = \text{Bild}(A)$.

- c) *Zusatz*: Seien feste Vektoren $x = (x_1, \dots, x_m), y = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$ und eine von einem Parametervektor $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$ abhängende Funktion $f_\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_\alpha(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x$ gegeben. Bestimmen Sie den Parametervektor $\alpha_0 \in \mathbb{R}^2$ so, dass

$$\sum_{i=1}^m (y_i - f_{\alpha_0}(x_i))^2 = \min_{\alpha \in \mathbb{R}^2} \sum_{i=1}^m (y_i - f_\alpha(x_i))^2.$$

Hinweis: Fassen Sie die Aufgabe als lineares Ausgleichsproblem auf mit

$$A = (1, x) := \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times 2} \text{ und } y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

und nutzen Sie Aufgabenteil b).

Allgemeine Informationen

- Webseite zur Vorlesung: <http://www.math.kit.edu/iana3/lehre/hm2phys2020s/>
- Kursmaterialien in ILIAS: <https://ilias.studium.kit.edu/>

Übungsbetrieb

- **WICHTIG: Anmeldung** zu den **Tutorien** bis zum **26.04.2020, 14 Uhr**, unter <https://www.redseat.de/kit-physik/>. Die Einteilung wird am selben Tag noch per E-Mail verschickt. Die Tutorien beginnen ab dem 27.04.2020 und finden zu den angegebenen Terminen in Form von **Videokonferenzen** in **Microsoft Teams** statt. Nähere Informationen hierzu finden Sie im ILIAS-Kurs.
- Jeden Donnerstag erscheint auf obiger Webseite und im ILIAS-Kurs ein Übungsblatt. Sie umfassen den Stoff der aktuellen Woche und werden zum Teil freitags in der Übung, zum Teil in den Tutorien der folgenden Woche besprochen. Die Übung wird als **Video** in ILIAS zur Verfügung gestellt.

Klausur

- Informationen hierzu liegen noch nicht vor und werden noch bekanntgegeben.