Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

1. Übungsblatt

Aufgabe 1 (Übung)

Seien $m, n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ und $(\cdot|\cdot)$ das Standardskalarprodukt im $\mathbb{K}^m$.

a) Zeigen Sie, dass
$$\operatorname{Bild}(A)^\perp = \operatorname{Kern}(A^*).$$

b) Sei nun $m = n$ und $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Zeigen Sie:
$$A \text{ ist selbstadjungiert, d.h., } A = A^*. \iff (Av|v) \in \mathbb{R} \text{ für alle } v \in \mathbb{C}^n.$$

Seien nun $(V, (\cdot|\cdot))$ ein beliebiger Skalarproduktraum und $M, N \subseteq V$ Untervektorräume von V.

c) Zeigen Sie $(M + N)^\perp = M^\perp \cap N^\perp$.

d) Sei nun zusätzlich $\dim(M) < \infty$. Zeigen Sie
$$(M^\perp)^\perp = M.$$
Hinweis: Zeigen Sie die Mengengleichheit durch doppelte Inklusion. Nutzen Sie $V = M \oplus M^\perp$ (vgl. Satz 15.8) für den Nachweis der Inklusion $\subseteq$.

Lösungsvorschlag:

a) Wir beginnen mit der folgenden kurzen Beobachtung:
$$(\mathbb{K}^m)^\perp = \{0\}. \tag{$*$}$$
Begründung: Da $(\mathbb{K}^m)^\perp$ ein Untervektorraum von $\mathbb{K}^m$ ist, ist $\{0\} \subseteq (\mathbb{K}^m)^\perp$ klar. Ist umgekehrt $v \in (\mathbb{K}^m)^\perp$, so gilt per Definition $(w|v) = 0$ für alle $w \in \mathbb{K}^m$. Insbesondere folgt für $w = v$, dass $\|v\|^2 = (v|v) = 0$, also $v = 0$ ist. Damit gilt auch $(\mathbb{K}^m)^\perp \subseteq \{0\}$.

Da $(Aw|v) = (w|A^*v)$ für alle $v \in \mathbb{K}^m$, $w \in \mathbb{K}^n$ (vgl. Regel 15.4 (5)), folgt
$$\begin{aligned}
& v \in \operatorname{Kern}(A^*) \\
\iff\; & A^*v = 0 \\
\overset{(*)}{\iff}\; & (w|A^*v) = 0 \quad \text{für alle } w \in \mathbb{K}^n \\
\iff\; & (Aw|v) = 0 \quad \text{für alle } w \in \mathbb{K}^n \\
\iff\; & v \in \operatorname{Bild}(A)^\perp
\end{aligned}$$

b) „⇒“ Da A selbstadjungiert ist, gilt $A = A^*$. Somit folgt

$$(Av|v) = (v|A^*v) = (v|Av) = \overline{(Av|v)} \quad \text{für alle } v \in \mathbb{C}^n.$$

Für alle $v \in \mathbb{C}^n$ muss damit $\operatorname{Im}((Av|v)) = 0$ sein, also $(Av|v) \in \mathbb{R}$.
„⇐“ Sei $A = (a_{jk}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine Matrix mit $(Av|v) \in \mathbb{R}$ für alle $v \in \mathbb{C}^n$ und sei $\{e_1, ..., e_n\} \subseteq \mathbb{C}^n$ die kanonische Orthonormalbasis. Seien ferner $j, k \in \{1, ..., n\}$ und $\alpha \in \mathbb{C}$ beliebig. Aus der Sesqulinearität des Skalarproduktes folgt

$$\underbrace{(A(e_k + \alpha e_j)|(e_k + \alpha e_j))}_{\in\mathbb{R}} = \underbrace{(Ae_k|e_k)}_{\in\mathbb{R}} + \overline{\alpha}(Ae_k|e_j) + \alpha(Ae_j|e_k) + |\alpha|^2 \underbrace{(Ae_j|e_j)}_{\in\mathbb{R}},$$

wobei die mit den geschweiften Klammern versehenen Terme auf Grund der Voraussetzung reell sind. Gehen wir in der oberen Gleichung zum Imaginärteil über, erhalten wir

$$\begin{aligned}0 &= \operatorname{Im}(\overline{\alpha}(Ae_k|e_j)) + \operatorname{Im}(\alpha(Ae_j|e_k)) \\ &= \operatorname{Im}(\overline{\alpha}a_{jk}) + \operatorname{Im}(\alpha a_{kj}) \\ &= \operatorname{Im}(\overline{\alpha}a_{jk}) - \operatorname{Im}(\overline{\alpha}\,\overline{a_{kj}}).\end{aligned}$$

Setzen wir $\alpha = 1$, folgt hieraus $\operatorname{Im}(a_{jk}) = \operatorname{Im}(\overline{a_{kj}})$. Setzen wir dagegen $\alpha = i$, folgt (unter Verwendung von $\operatorname{Im}(iz) = \operatorname{Re}(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$) genauso $\operatorname{Re}(a_{jk}) = \operatorname{Re}(\overline{a_{kj}})$. Damit stimmen Real- und Imaginärteile von a_{jk} und $\overline{a_{kj}}$ überein, womit $a_{jk} = \overline{a_{kj}}$ gezeigt ist. Da dies für beliebige $j, k \in \{1, ..., n\}$ gilt, folgt $A = A^*$.

c) Aus der Sesqulinearität des Skalarproduktes folgt unmittelbar für $v \in V$:

$$v \perp M \text{ und } v \perp N \iff v \perp M + N.$$

In der Tat ist „⇐“ klar, da $M + N \supseteq M, N$. Ist umgekehrt $v \perp M$ und $v \perp N$, so folgt $(v|m + n) = (v|m) + (v|n) = 0$ für beliebige $m \in M$, $n \in N$. Also gilt $v \perp (M + N)$, womit „⇒ “ gezeigt ist. Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned}&v \in M^\perp \cap N^\perp \\ \iff &v \perp M \text{ und } v \perp N \\ \iff &v \perp M + N \\ \iff &v \in (M + N)^\perp.\end{aligned}$$

d) „⊇“ Seien $m \in M$ und $v \in M^\perp$. Dann gilt $(v|m) = 0$ nach Definition von $M^\perp$. Da dies für beliebige $v \in M^\perp$ gilt, folgt $m \in (M^\perp)^\perp$.
„⊆“ Sei $v \in (M^\perp)^\perp$. Da $\dim(M) < \infty$, gilt nach dem Projektionssatz $V = M \oplus M^\perp$. Also gibt es eindeutige Vektoren $m \in M$ und $n \in M^\perp$, sodass $v = m + n$ ist. Da $v \in (M^\perp)^\perp$ ist, gilt $v \perp M^\perp$ und damit insbesondere $(v|n) = 0$. Es folgt $0 = (v|n) = (m|n) + (n|n) = \|n\|^2$, da $m \perp n$. Hieraus folgt $n = 0$. Also ist $v = m \in M$. Da $v \in (M^\perp)^\perp$ beliebig war, haben wir $(M^\perp)^\perp \subseteq M$ gezeigt.

Aufgabe 2 (Tutorium)

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $(\cdot|\cdot)$.

a) Seien Vektoren $v_1, ..., v_n, w_1, ..., w_m \in V$ und Skalare $\alpha_1, ..., \alpha_n, \beta_1, ..., \beta_m \in \mathbb{K}$ $(n, m \in \mathbb{N})$ gegeben. Zeigen Sie, dass

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \middle| \sum_{j=1}^{m} \beta_j w_j \right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \alpha_i \overline{\beta_j} \, (v_i | w_j) \, .$$

Seien nun $n \in \mathbb{N}$ und $\{u_1, ..., u_n\} \subseteq V$ eine Orthonormalbasis von V. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

b) Es gilt $(v|w) = \sum_{i=1}^{n} (v|u_i)\overline{(w|u_i)}$ für alle $v, w \in V$.

c) Es gilt $\|v\|^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} |(v|u_i)|^2$ für alle $v \in V$.

Lösungsvorschlag:

a) Die Aussage folgt unmittelbar aus der Sesquilinearität von $(\cdot|\cdot)$:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \middle| \sum_{j=1}^{m} \beta_j w_j \right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(v_i \middle| \sum_{j=1}^{m} \beta_j w_j \right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sum_{j=1}^{m} \overline{\beta_j} \, (v_i | w_j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \alpha_i \overline{\beta_j} \, (v_i | w_j) \, .$$

b) Seien $v, w \in V$. Nach Satz 15.1 (2) gilt dann $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i$ und $w = \sum_{j=1}^{n} \beta_j u_j$ mit $\alpha_i = (v|u_i)$ und $\beta_j = (w|u_j)$, $i, j \in \{1, ..., n\}$. Aus Aufgabenteil a) folgt nun

$$(v|w) = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \middle| \sum_{j=1}^{n} \beta_j v_j \right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \overline{\beta_j} \underbrace{(u_i | u_j)}_{\delta_{ij}} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overline{\beta_i} = \sum_{i=1}^{n} (v|u_i)\overline{(w|u_i)},$$

wobei wir im vorletzten Schritt ausgenutzt haben, dass $\{u_1, ..., u_n\}$ eine Orthonormalbasis ist, also insbesondere

$$(u_i | u_j) = \delta_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{für } i = j, \\ 0 & \text{für } i \neq j. \end{cases}$$

c) Sei $v \in V$. Setzen wir $w := v$ in Aufgabenteil b), so folgt

$$\|v\|^2 = (v|v) = \sum_{i=1}^{n} (v|u_i)\overline{(v|u_i)} = \sum_{i=1}^{n} |(v|u_i)|^2.$$

Aufgabe 3 (Übung)

Sei $(V, (\cdot|\cdot))$ ein Skalarproduktraum über $\mathbb{K}$ mit Norm $\|v\| := (v|v)^{\frac{1}{2}}$, $v \in V$. Wie aus Satz 14.23, HM I, bekannt ist, gilt dann die *Parallelogrammidentität*, d.h., für $u, v \in V$ gilt

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2 \left(\|u\|^2 + \|v\|^2 \right) . \qquad (*)$$

a) Sei nun $V = C([0, 1]) := \{ f \colon [0, 1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist stetig} \}$. Für $f \in V$ definieren wir $\|f\| := \max_{x \in [0,1]} |f(x)|$.

(i) Zeigen Sie, dass $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum ist.

(ii) Zeigen Sie mit Hilfe der Parallelogrammidentität, dass $(V, \|\cdot\|)$ kein Skalarproduktraum sein kann.

b) Zeigen Sie die Umkehrung von a) (vgl. Satz 14.24, HM I): Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum über $\mathbb{K}$, sodass die Parallelogrammidentität $(*)$ gilt. Zeigen Sie, dass dann ein Skalarprodukt $(\cdot|\cdot)$ auf V existiert, sodass $\|v\| = (v|v)^{\frac{1}{2}}$ für alle $v \in V$ gilt.

Gehen Sie hierfür in mehreren Schritten vor:

(1) Betrachten Sie zunächst den Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und definieren Sie

$$\langle u|v\rangle := \frac{1}{4}(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2) \quad \text{für } u, v \in V.$$

Machen Sie sich klar, dass $\|u\| = \langle u, u\rangle^{\frac{1}{2}}$ für alle $u \in V$ gilt. Damit ist auch $\langle \cdot, \cdot \rangle$ insbesondere positiv. Wir weisen nun in mehreren Schritten nach, dass $\langle \cdot|\cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf V ist.

(i) Zeigen Sie $\langle u|v\rangle = \langle v|u\rangle$ und $\langle u|2v\rangle = 2\langle u|v\rangle$ für alle $u, v \in V$.

(ii) Zeigen Sie, $\langle u+v, w\rangle = \langle u|w\rangle + \langle v|w\rangle$ für alle $u, v, w \in V$.

(iii) Folgern Sie aus (ii), dass $\langle \lambda u|v\rangle = \lambda\langle u|v\rangle$ für alle $\lambda \in \mathbb{Q}$ und $u, v \in V$.

(iv) Zeigen Sie, dass für feste $u, v \in V$ die Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto \langle tu, v\rangle$ stetig ist.

(v) Folgern Sie aus (iii) und (iv), dass $\langle \lambda u|v\rangle = \lambda\langle u|v\rangle$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$, und $u, v \in V$.

(2) Sei nun $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Wir definieren

$$(u|v) := \langle u|v\rangle + i\langle u|iv\rangle \quad \text{für } u, v \in V,$$

wobei $\langle \cdot|\cdot \rangle$ so definiert ist wie in (1). Zeigen Sie, dass $(\cdot|\cdot)$ ein Skalarprodukt auf V definiert mit $\|v\| = (v|v)^{\frac{1}{2}}$ für alle $v \in V$.

Lösungsvorschlag:

a) (i) Sei $f \in V$. Da $[0,1]$ ein kompaktes Intervall ist und mit f auch $|f|$ stetig ist, nimmt $|f|$ ein Maximum nach Satz 8.18, HM I, an. Damit ist $\|f\|$ wohldefiniert.

(I) *Positivität*: Für $f \in V$ gilt

$$\|f\| = 0 \Leftrightarrow \max_{x \in [0,1]} |f(x)| = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \quad \forall x \in [0,1] \Leftrightarrow f = 0.$$

(II) *Homogenität*: Für $f \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\|\lambda f\| = \max_{x \in [0,1]} |\lambda f(x)| = |\lambda| \max_{x \in [0,1]} |f(x)| = |\lambda|\, \|f\|.$$

(III) *Dreiecksungleichung*: Seien $f, g \in V$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \|f+g\| = \max_{x \in [0,1]} |(f+g)(x)| &\leq \max_{x \in [0,1]} (|f(x)| + |g(x)|) \\ &\leq \max_{x \in [0,1]} |f(x)| + \max_{x \in [0,1]} |g(x)| = \|f\| + \|g\|. \end{aligned}$$

Damit haben wir nachgewiesen, dass $\|\cdot\|$ eine Norm auf V definiert.

(ii) Angenommen, $(V, \|\cdot\|)$ wäre ein Skalarproduktraum. Dann würde auch die Parallelogrammidentität $(*)$ gelten. Wir definieren

$$\begin{aligned} f\colon [0,1] &\to \mathbb{R}, \quad f(x) = x, \\ g\colon [0,1] &\to \mathbb{R}, \quad g(x) = 1 - x. \end{aligned}$$

Dann sind $f, g \in V$ mit $\|f\| = \|g\| = 1$. Weiter ist $(f+g)(x) = 1$ und $(f-g)(x) = 2x-1$, $x \in [0,1]$, woraus wiederum $\|f+g\| = \|f-g\| = 1$ folgen. Nach der Parallelogrammidentität wäre dann aber

$$2 = 1 + 1 = \|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 = 2(\|f\|^2 + \|g\|^2) = 2(1+1) = 4.$$

Widerspruch.

b) (1) Um zu zeigen, dass $\langle\cdot|\cdot\rangle$ ein Skalarprodukt auf V definiert, müssen wir Eigenschaften (S1), (S2) und (S3) in der Definition des Skalarproduktes (§14, HM I) nachweisen. Es ist

$$\langle v|v\rangle = \frac{1}{4}(\|v+v\|^2 - \|v-v\|^2) = \frac{1}{4}(4\|v\|^2 - 0) = \|v\|^2, \quad v \in V.$$

Wurzelziehen zeigt $\|v\| = \langle v|v\rangle^{\frac{1}{2}}$, $v \in V$. Aus obiger Gleichung folgt auch insbesondere

$$\forall v \in V : \langle v|v\rangle \geq 0 \quad \text{und} \quad \langle v|v\rangle = 0 \Leftrightarrow \|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0,$$

also gilt (S3). Es verbleibt, (S1) und (S2) zu zeigen. Dies tun wir nun in den folgenden Schritten.

(i) Seien $u, v \in V$. Dann folgt

$$\langle u|v\rangle = \frac{1}{4}(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2) = \frac{1}{4}(\|v+u\|^2 - \|v-u\|^2) = \langle v|u\rangle.$$

Also gilt (S1). Weiter folgern wir mit $(*)$

$$\begin{aligned} \|u+2v\|^2 + \|u\|^2 &= \|(u+v)+v\|^2 + \|(u+v)-v\|^2 = 2(\|u+v\|^2 + \|v\|^2). \\ \|u-2v\|^2 + \|u\|^2 &= \|(u-v)-v\|^2 + \|(u-v)+v\|^2 = 2(\|u-v\|^2 + \|v\|^2). \end{aligned}$$

Subtraktion und Division durch 4 ergibt

$$\langle u, 2v\rangle = \frac{1}{4}(\|u+2v\|^2 - \|u-2v\|^2) = 2 \cdot \frac{1}{4}(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2) = 2\langle u, v\rangle.$$

(ii) Seien $u, v, w \in V$. Nach der Definition von $\langle\cdot|\cdot\rangle$ ist

$$\begin{aligned} \langle u|w\rangle &= \frac{1}{4}(\|u+w\|^2 - \|u-w\|^2), \\ \langle v|w\rangle &= \frac{1}{4}(\|v+w\|^2 - \|v-w\|^2). \end{aligned}$$

Durch Addition der obigen Gleichungen erhalten wir (unter der Verwendung der Parallelogrammregel $(*)$ und (i))

$$\begin{aligned}
\langle u|w\rangle + \langle v|w\rangle &= \frac{1}{4}\left[(\|u+w\|^2 + \|v+w\|^2) - (\|u-w\|^2 + \|v-w\|^2)\right] \\
&\overset{(*)}{=} \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}(\|u+v+2w\|^2 + \|u-v\|^2) - \frac{1}{2}(\|u+v-2w\|^2 + \|u-v\|^2)\right] \\
&= \frac{1}{8}\left(\|u+v+2w\|^2 - \|u+v-2w\|^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\langle u+v|2w\rangle \overset{\text{(i)}}{=} \frac{1}{2}\cdot 2\cdot\langle u+v|w\rangle = \langle u+v|w\rangle.
\end{aligned}$$

(iii) Seien $u, v \in V$. Da unmittelbar aus der Definition $\langle 0|v\rangle = 0$ folgt, folgern wir aus (ii) zunächst

$$0 = \langle u-u|v\rangle \overset{\text{(ii)}}{=} \langle u|v\rangle + \langle -u|v\rangle,$$

also

$$\langle -u|v\rangle = -\langle u|v\rangle. \tag{1}$$

Ferner folgern wir aus (ii) mittels Induktion über $n \in \mathbb{N}$, dass $(nu|v) = n(u|v))$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und zusammen mit (1) sogar für alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt. Daraus folgern wir für beliebiges $m \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$

$$\langle u|v\rangle = \left\langle m\frac{u}{m}\middle|v\right\rangle = m\left\langle \frac{u}{m}\middle|v\right\rangle \Leftrightarrow \left\langle \frac{u}{m}\middle|v\right\rangle = \frac{1}{m}\langle u|v\rangle.$$

Ist nun $\lambda \in \mathbb{Q}$, so ist $\lambda = \frac{n}{m}$, $n \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$. Aus dem bereits Bewiesenen folgt dann

$$\langle \lambda u|v\rangle = \left\langle \frac{n}{m}u\middle|v\right\rangle = \left\langle n\frac{u}{m}\middle|v\right\rangle = n\left\langle \frac{u}{m}\middle|v\right\rangle = \frac{n}{m}\langle u|v\rangle = \lambda\langle u|v\rangle.$$

(iv) Seien $u, v \in V$. Da Summen und Produkte stetiger Funktion wiederum stetig sind, reicht es zu zeigen, dass die Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \|tu+v\|$ und $t \mapsto \|tu-v\|$, stetig sind. Sei $(t_n) \subseteq \mathbb{R}$ mit $t_n \to t$ $(n \to \infty)$. Dann gilt nach der umgekehrten Dreiecksungleichung

$$\big|\|t_n u + v\| - \|tu+v\|\big| \le \|(t_n u + v) - (tu+v)\| = |t_n - t|\,\|u\| \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Also ist $t \mapsto \|tu+v\|$ stetig. Analog folgt die Stetigkeit von $t \mapsto \|tu-v\|$.

(v) Seien $u, v \in V$. Wir definieren die Abbildungen

$$\begin{aligned}
&\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \varphi(t) = \langle tu|v\rangle, \\
&\psi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \psi(t) = t\langle u|v\rangle.
\end{aligned}$$

Die Abbildungen φ und ψ sind stetig. In der Tat, φ ist nach (iv) stetig, und da ψ linear ist, ist die Stetigkeit von ψ klar. Weiter stimmen nach (iii) die stetigen Funktionen φ und ψ auf $\mathbb{Q}$ überein. Da jedes $t \in \mathbb{R}$ Häufungspunkt von $\mathbb{Q}$ ist, folgt, dass die Funktionen f und g identisch sein müssen. Denn: Ist $t \in \mathbb{R}$, so existiert eine Folge $(t_n) \subseteq \mathbb{Q}$ mit $t_n \to t$ $(n \to \infty)$. Es folgt

$$\varphi(t) \overset{\text{(iv)}}{=} \lim_{n\to\infty} \varphi(t_n) \overset{\text{(iii)}}{=} \lim_{n\to\infty} \psi(t_n) = \psi(t).$$

Dies impliziert aber

$$\langle \lambda u | v \rangle = \varphi(\lambda) = \psi(\lambda) = \lambda \langle u | v \rangle \quad \text{für alle } \lambda \in \mathbb{R}.$$

(2) Um zu zeigen, dass $(\cdot|\cdot)$ ein Skalarprodukt auf V definiert, müssen wir wieder Eigenschaften (S1), (S2) und (S3) nachweisen. Zunächst gilt für $v \in V$

$$(v|v) = \langle v|v\rangle + i\langle v|iv\rangle = \|v\|^2 + 0 = \|v\|^2,$$

da

$$\langle v|iv\rangle = \frac{1}{4}\left(\|v+iv\| - \|v-iv\|^2\right) = \frac{1}{4}\left(|1+i|^2 - (|1-i|^2\right) \|v\|^2 = \|v\|^2.$$

Also gilt (S3) und aus obiger Gleichung folgt durch Wurzelziehen $\|v\| = (v|v)^{\frac{1}{2}}$, $v \in V$. Im Folgenden nutzen wir oft die Identitäten

$$\langle u|iv\rangle = \langle -u|iv\rangle, \ \langle iu|v\rangle = \langle u| - iv\rangle \quad (u, v \in V),$$

die leicht einzusehen sind und direkt aus der Homogenität von $\|\cdot\|$ folgen.
Für $u, v \in V$ folgern wir damit

$$(v|u) = \langle v|u\rangle + i\langle v|iu\rangle = \langle u|v\rangle + i\langle -iv|u\rangle = \langle u|v\rangle - i\langle u|iv\rangle = \overline{(u|v)}.$$

Also gilt (S1). Es verbleibt (S2) zu zeigen, also dass $u \mapsto (u|w)$ für festes $w \in V$ linear ist. Da jeder Vektorraum über $\mathbb{C}$ auch ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ ist, folgt leicht nach dem bereits Bewiesenen in (1)

$$\begin{aligned} &(u+v|w) = (u|w) + (v|w) && u, v, w \in V, \\ &(\lambda u|v) = \lambda (u|v) && u, v \in V, \ \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{$**$}$$

Wir müssen also nur noch zeigen, dass $(**)$ nicht nur für $\lambda \in \mathbb{R}$, sondern für $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt. Dazu beobachten wir, dass für $u, v \in V$

$$\begin{aligned} (iu|v) &= \langle iu|v\rangle + i\langle iu|iv\rangle \\ &= \langle u| - iv\rangle + i\langle u|v\rangle = i\left[-i\langle u| - iv\rangle + \langle u|v\rangle\right] = i\left[\langle u|v\rangle + i\langle u|iv\rangle\right] = i(u|v). \end{aligned}$$

Für $\lambda = \operatorname{Re}(\lambda) + i\operatorname{Im}(\lambda) \in \mathbb{C}$ folgt damit

$$\begin{aligned} (\lambda u|v) &= ((\operatorname{Re}(\lambda) + i\operatorname{Im}(\lambda))u|v) \\ &= \operatorname{Re}(\lambda)(u|v) + \operatorname{Im}(\lambda)(iu|v) \\ &= \operatorname{Re}(\lambda)(u|v) + i\operatorname{Im}(\lambda)(u|v) = \lambda(u|v). \end{aligned}$$

Damit gilt $(**)$ auch für $\lambda \in \mathbb{C}$ und (S2) ist bewiesen.

Aufgabe 4 (Tutorium)

Hinweis: In Satz 15.2 (Gram-Schmidt-Verfahren) hat sich ein kleiner Fehler eingeschlichen. Es muss

$$c_k := v_k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{(v_k|c_j)}{\|c_j\|^2} c_j \quad (k = 2, ..., n)$$

heißen.

a) Berechnen Sie eine Orthonormalbasis von $U = \text{lin}(\{u_1, u_2, u_3\}) \subseteq \mathbb{R}^4$ und berechnen Sie $d(v, U) := \min_{u \in U} \|v - u\|$ mit

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

b) Sei $V = C([-1, 1])$ ausgestattet mit dem Skalarprodukt $(f|g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$, $f, g \in V$, und $U = \text{lin}(\{p_0, p_1, p_2\})$, $p_i \colon [-1, 1] \to \mathbb{R}, p_i(x) = x^i$, $i = 0, 1, 2$, der Untervektorraum der Polynomfunktionen des Grades ≤ 2. Berechnen Sie mithilfe des Gram-Schmidt-Verfahrens eine Orthonormalbasis von U.

Lösungsvorschlag:

a) Wir orientieren uns an der Notation im Skript:

$$c_1 = u_1;$$

$$\begin{aligned} c_2 &= u_2 - \frac{(u_2|c_1)}{(c_1|c_1)} c_1 \\ &= u_2 - \frac{1}{2} c_1 \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_3 &= u_3 - \frac{(u_3|c_1)}{(c_1|c_1)} c_1 - \frac{(u_3|c_2)}{(c_2|c_2)} c_2 \\ &= u_3 + \frac{1}{2} c_1 - 3 c_2 \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Normierung ergibt

$$b_1 = \frac{c_1}{\|c_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \frac{c_2}{\|c_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \frac{c_3}{\|c_3\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Nach Satz 15.8 ist die Orthogonalprojektion Pv von v auf U gegeben durch

$$
\begin{aligned}
Pv &= \sum_{i=1}^{3} (v|b_i)b_i \\
&= \frac{3}{\sqrt{2}} b_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} b_2 + 0 \cdot b_3 \\
&= \frac{3}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Damit nach Satz 15.8 (6)

$$
\mathrm{d}(v, U) := \min_{u \in U} \|v - u\| = \|v - Pv\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{2}.
$$

b) Wir orientieren uns wieder an der Notation von Satz 15.2. Um die Skalarprodukte zwischen den p_i ausrechnen zu können, nutzen wir folgende Formel

$$
(p_i|p_j) = \int_{-1}^{1} p_i(x)p_j(x)dx = \int_{-1}^{1} p_{i+j}(x)dx = \frac{1}{i+j+1} x^{i+j+1}\Big|_{-1}^{1} = \frac{1-(-1)^{i+j+1}}{i+j+1}
$$

für $i, j = 0, 1, 2$ (mit der Definition $p_3(x) := x^3, x \in [-1, 1]$). Wir wenden nun das Gram-Schmidt-Verfahren an.

$$
c_0 = p_0, \quad c_1 = p_1 - (p_1|c_0)c_0 = p_1
$$

da $(p_1|c_0) = (p_1 p_0) = 0$. Weiter ist

$$
\begin{aligned}
c_2 &= p_2 - \frac{(p_2|c_0)}{(c_0|c_0)} c_0 - \frac{(p_2|c_1)}{(c_1|c_1)} c_1 \\
&= p_2 - \frac{(p_2|p_0)}{(p_0|p_0)} p_0 - \frac{(p_2|p_1)}{(p_1|p_1)} p_1 \\
&= p_2 - \frac{\frac{2}{3}}{2} p_0 - 0 \cdot p_1 \\
&= p_2 - \frac{1}{3} p_0.
\end{aligned}
$$

Normierung ergibt nun

$$
b_0 := \frac{1}{\sqrt{2}} p_0, \quad b_1 := \sqrt{\frac{3}{2}} p_1, \quad b_2 := \sqrt{\frac{45}{8}} \left(p_2 - \frac{1}{3} p_0 \right),
$$

da

$$
\left(p_2 - \frac{1}{3} p_0 \middle| p_2 - \frac{1}{3} p_0 \right) = (p_2|p_2) - \frac{2}{3}(p_2|p_0) + \frac{1}{9}(p_0|p_0) = \frac{2}{5} - \frac{4}{9} + \frac{2}{9} = \frac{8}{45}.
$$

Also sind $b_0, b_1, b_2 \colon [-1, 1] \to \mathbb{R}$ explizit gegeben durch

$$
b_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad b_1(x) = \sqrt{\frac{3}{2}} x, \quad b_2(x) = \sqrt{\frac{45}{8}} \left(x^2 - \frac{1}{3} \right), \quad x \in [-1, 1].
$$

Aufgabe 5 (Übung)

Es sei $(G, \odot)$ eine Gruppe. Seien ferner (G1), (G2) und (G3) die Gruppenaxiome aus der Vorlesung (vgl. Seite 7, Skript). Zeigen Sie:

a) Das Element e in (G2) ist eindeutig bestimmt.

b) Sind $a, b \in G$ wie in (G3), so ist b durch a eindeutig bestimmt. (Wir schreiben $a^{-1} := b$).

c) Sind $a, b \in G$ gegeben, so gibt es ein eindeutiges Element $x \in G$ mit $a \odot x = b$.

Zusatz: Im Folgenden zeigen Sie, dass man die Gruppenaxiome abschwächen kann.
Es sei G eine nichtleere Menge versehen mit einer Verknüpfung $\odot \colon G \times G \to G$. Ferner definieren wir die Aussagen (G2') und (G3') durch

(G2') Es existiert ein $e \in G$, sodass $e \odot a = a$ für alle $a \in G$ gilt (*linksneutrales Element*),
(G3') Für alle $a \in G$ existiert ein $b \in G$, sodass $b \odot a = e$ (*linksinverses Element*).

Zeigen Sie:

$$(G, \odot) \text{ erfüllt (G1), (G2') (G3').} \iff (G, \odot) \text{ ist eine Gruppe.}$$

Lösungsvorschlag:

a) Seien $e, e' \in G$ neutrale Elemente. Dann folgt

$$e' \overset{e \text{ neutral}}{=} e \odot e' \overset{e' \text{ neutral}}{=} e.$$

Damit ist das neutrale Element eindeutig.

b) Seien $a \in G$ und $b, b' \in G$, sodass $b \odot a = a \odot b = e$ und $b' \odot a = a \odot b' = e$. Dann folgt

$$b' \overset{\text{(G2)}}{=} e \odot b' = (b \odot a) \odot b' \overset{\text{(G1)}}{=} b \odot (a \odot b') = b \odot e \overset{\text{(G2)}}{=} b.$$

Damit ist das Element b in (G3) durch a eindeutig bestimmt.

c) *Eindeutigkeit*: Seien $a, b \in G$ gegeben und $x, x' \in G$ mit $a \odot x = a \odot x' = b$. Dann folgt

$$x \overset{\text{(G2),(G3)}}{=} (a^{-1} \odot a) \odot x \overset{\text{(G1)}}{=} a^{-1} \odot (a \odot x) = a^{-1} \odot (a \odot x') \overset{\text{(G1)}}{=} (a^{-1} \odot a) \odot x' \overset{\text{(G2),(G3)}}{=} x'.$$

Existenz: Sind $a, b \in G$ gegeben, so definieren wir $x := a^{-1} \odot b \in G$. Dann gilt

$$a \odot x = a \odot (a^{-1} \odot b) \overset{\text{(G1)}}{=} (a \odot a^{-1}) \odot b \overset{\text{(G3)}}{=} e \odot b \overset{\text{(G2)}}{=} b.$$

Zusatz: „$\Leftarrow$“ Dies ist klar, da (G2)$\Rightarrow$(G2') und (G3)$\Rightarrow$(G3') direkt aus den Definitionen folgen.
„$\Rightarrow$“ Seien (G1),(G2') und (G3') wahr. Wir müssen zeigen, dass dann auch (G2) und (G3) wahr sind. Zuerst zeigen wir (G3). Seien dazu $a, b \in G$ wie in (G3'). Nach (G3') gibt es ferner $c \in G$ mit $c \odot (a \odot b) = e$. Dann folgt

$$\begin{aligned} a \odot b &\overset{\text{(G2')}}{=} e \odot (a \odot b) \overset{\text{(G3')}}{=} [c \odot (a \odot b)] \odot (a \odot b) \\ &\overset{\text{(G1)}}{=} c \odot [a \odot ((b \odot a) \odot b)] \overset{\text{(G3')}}{=} c \odot [a \odot (e \odot b)] \overset{\text{(G2')}}{=} c \odot (a \odot b) = e. \end{aligned}$$

Also gilt $b \odot a = a \odot b = e$ und damit auch (G3). Wir schreiben abkürzend $a^{-1} := b$. Nun können wir einfach (G2) zeigen. Sei dazu $a \in G$. Dann gilt

$$a \odot e \overset{\text{(G3')}}{=} a \odot (a^{-1} \odot a) \overset{\text{(G1)}}{=} (a \odot a^{-1}) \odot a \overset{\text{(G3)}}{=} e \odot a \overset{\text{(G2')}}{=} a.$$

Damit gilt auch (G2) und alles ist gezeigt.

Aufgabe 6 (Tutorium)

Seien $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n < m$. Wir betrachten für $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$, $y \in \mathbb{K}^m$ die Gleichung

$$Ax = y.$$

a) Machen Sie sich klar, dass es im Allgemeinen keine Lösung $x \in \mathbb{K}^n$ gibt.

b) In Anbetracht von a) formulieren wir das *lineare Ausgleichsproblem*: Finde $x_0 \in \mathbb{K}^n$, sodass

$$\|y - Ax_0\| = \min_{x \in \mathbb{K}^n} \|y - Ax\|. \tag{$*$}$$

Zeigen Sie: Es existiert $x_0 \in \mathbb{K}^n$, das $(*)$ erfüllt. Weiterhin gilt für $x_0 \in \mathbb{K}^n$ die Äquivalenz:

$$x_0 \in \mathbb{K}^n \text{ erfüllt } (*). \iff A^*Ax_0 = A^*y.$$

Hinweis: Nutzen Sie den Projektionssatz (Satz 15.8) mit $V = \mathbb{K}^m$ und $U = \mathrm{Bild}(A)$.

c) *Zusatz*: Seien feste Vektoren $x = (x_1, ..., x_m), y = (y_1, ..., y_m) \in \mathbb{R}^m$ und eine von einem Parametervektor $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$ abhängende Funktion $f_\alpha \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_\alpha(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x$ gegeben. Bestimmen Sie den Parametervektor $\alpha_0 \in \mathbb{R}^2$ so, dass

$$\sum_{i=1}^{m} (y_i - f_{\alpha_0}(x_i))^2 = \min_{\alpha \in \mathbb{R}^2} \sum_{i=1}^{m} (y_i - f_\alpha(x_i))^2.$$

Hinweis: Fassen Sie die Aufgabe als lineares Ausgleichsproblem auf mit

$$A = (1, x) := \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times 2} \text{ und } y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

und nutzen Sie Aufgabenteil b).

Lösungsvorschlag:

a) Setzen wir beispielsweise $n = 1$, $m = 2$ und

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 1} \quad \text{und} \quad y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$Ax = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = y \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R},$$

d.h., die Gleichung $Ax = y$ hat keine Lösung. Allgemeiner gilt (z.B. nach der Dimensionsformel) $\dim \mathrm{Bild}(A) \leq \dim \mathbb{K}^n = n$ und damit

$$\dim \mathrm{Bild}(A) \leq n < m = \dim \mathbb{K}^m.$$

Also muss $\mathrm{Bild}(A) \subsetneqq \mathbb{K}^m$ sein, d.h., sofern $n < m$ ist, existiert immer ein $y \in \mathbb{K}^m$, sodass $Ax \neq y$ für alle $x \in \mathbb{K}^n$ ist.

b) Sei Py die Orthogonalprojektion von $y \in \mathbb{K}^m$ auf $U = \mathrm{Bild}(A)$. Da Py in U liegt, existiert ein $x_0 \in \mathbb{K}^n$ mit $Py = Ax_0$. Nach Satz 15.8 (6) gilt dann

$$\|y - Ax_0\| = \min_{x \in \mathbb{K}^n} \|y - Ax\|.$$

Damit löst x_0 das lineare Ausgleichsproblem $(*)$. Nun zur Äquivalenz:
„$\Rightarrow$“ Angenommen, $x_0 \in \mathbb{K}^n$ erfüllt $(*)$. Dann gilt nach Satz 15.8 (6), dass $Ax_0 = Py$ ist, woraus mit Satz 15.8 (5) $y - Py = y - Ax_0 \perp \mathrm{Bild}(A)$ folgt. Nun gilt aber

$$\begin{aligned} & y - Ax_0 \perp \mathrm{Bild}(A) \\ \iff & (Ax|y - Ax_0) = 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{K}^n \\ \iff & (x|A^*(y - Ax_0)) = 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{K}^n \\ \iff & A^*(y - Ax_0) = 0 \Leftrightarrow A^*Ax_0 = A^*y. \end{aligned}$$

„$\Leftarrow$“ Sei $x_0 \in \mathbb{K}^n$, sodass $A^*Ax_0 = A^*y$ gilt. Nach obigen Äquivalenzen gilt dann $y - Ax_0 \perp \mathrm{Bild}(A)$. Sei nun $x \in \mathbb{K}^n$ beliebig. Dann folgt

$$\|y - Ax\|^2 = \|(y - Ax_0) + A(x_0 - x)\|^2 = \|y - Ax\|^2 + \|A(x_0 - x)\|^2 \geq \|y - Ax_0\|^2.$$

Da dies für beliebiges $x \in \mathbb{K}^n$ gilt, folgt $\|y - Ax\| \geq \|y - Ax_0\|$ für alle $x \in \mathbb{K}^n$. Damit erfüllt x_0 die Gleichung $(*)$.

c) *Zusatz*: Seien A und y so wie im Hinweis. Für $\alpha \in \mathbb{R}^2$ gilt dann $A\alpha = (f_\alpha(x_1), ..., f_\alpha(x_m))$, woraus

$$\|y - A\alpha\|^2 = \sum_{i=1}^{m} (y_i - f_\alpha(x_i))^2 \tag{2}$$

folgt. Also gilt auch

$$\min_{\alpha \in \mathbb{R}^2} \|y - A\alpha\|^2 = \min_{\alpha \in \mathbb{R}^2} \sum_{i=1}^{m} (y_i - f_\alpha(x_i))^2.$$

Nach Aufgabenteil b) wird für ein $a_0 \in \mathbb{R}^2$ das Minimum auf der linken Seite angenommen. Weiter gilt nach b)

$$A^*A\alpha_0 = A^*y.$$

Wir wollen nun dieses lineare Gleichungssystem lösen. Mit der Abkürzung $1 := (1, ..., 1) \in \mathbb{R}^m$ kann schnell nachrechnen, dass

$$A^*A = \begin{pmatrix} m & (1|x) \\ (1|x) & (x|x) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A^*y = \begin{pmatrix} (1|y) \\ (x|y) \end{pmatrix}$$

gilt. Wir wenden nun das Gaußsche Eliminationsverfahren für lineare Gleichungsssysteme an:

$$\begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} m & (1|x) & (1|y) \\ (1|x) & (x|x) & (x|y) \end{array} \right) \xrightarrow[m \cdot \mathrm{II} - (1|x) \cdot \mathrm{I}]{\mathrm{II'} =} \begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \mathrm{II'} \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} m & (1|x) & (1|y) \\ 0 & [m(x|x) - (1|x)^2] & [m(x|y) - (1|x)(1|y)] \end{array} \right).$$

Wenn wir $\overline{x} := \frac{1}{m}(1|x)$ bzw. $\overline{y} := \frac{1}{m}(1|y)$ für die Mittelwerte der x_i bzw. y_i schreiben, erhalten wir

$$\alpha_2 = \frac{m(x|y) - (1|x)(1|y)}{m(x|x) - (1|x)^2} = \frac{(x|y) - m\overline{x}\,\overline{y}}{(x|x) - m\overline{x}^2} = \frac{(x - \overline{x} \cdot 1|y - \overline{y} \cdot 1)}{(x - \overline{x} \cdot 1|x - \overline{x} \cdot 1)} = \frac{\sum_{i=1}^m (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sum_{i=1}^m (x_i - \overline{x})^2}$$

und

$$\alpha_1 = \frac{1}{m}\left[(1|y) - (1|x)\alpha_2\right] = \overline{y} - \overline{x}\alpha_2.$$

Damit haben wir $\alpha_0 = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$ gefunden und

$$\begin{aligned} f_{\alpha_0}(x) &= \overline{y} - \alpha_2\overline{x} + \alpha_2 x \\ &= \overline{y} + \alpha_2(x - \overline{x}). \end{aligned}$$

Bemerkung: Die Größe $\operatorname{cov}(x, y) := \frac{1}{m}\sum_{i=1}^m (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})$ wird in der Statistik als Stichprobenkovarianz bezeichnet. So ist also $f_{\alpha_0}(x) = \overline{y} + \frac{\operatorname{cov}(x,y)}{\operatorname{cov}(x,x)}(x - \overline{x})$.

Allgemeine Informationen

- Webseite zur Vorlesung: http://www.math.kit.edu/iana3/lehre/hm2phys2020s/
- Kursmaterialien in ILIAS: https://ilias.studium.kit.edu/

Übungsbetrieb

- **WICHTIG: Anmeldung** zu den **Tutorien** bis zum **26.04.2020, 14 Uhr,** unter https://www.redseat.de/kit-physik/. Die Einteilung wird am selben Tag noch per E-Mail verschickt. Die Tutorien beginnen ab dem 27.04.2020 und finden zu den angegebenen Terminen in Form von **Videokonferenzen** in **Microsoft Teams** statt. Nähere Informationen hierzu finden Sie im ILIAS-Kurs.

- Jeden Donnerstag erscheint auf obiger Webseite und im ILIAS-Kurs ein Übungsblatt. Sie umfassen den Stoff der aktuellen Woche und werden zum Teil freitags in der Übung, zum Teil in den Tutorien der folgenden Woche besprochen. Die Übung wird als **Video** in ILIAS zur Verfügung gestellt.

Klausur

- Informationen hierzu liegen noch nicht vor und werden noch bekanntgegeben.