

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

2. Übungsblatt

Aufgabe 7 (Übung)

Sei $f \in C_{\text{per}}([-\pi, \pi], \mathbb{C})$.

- a) Zeigen Sie $\hat{f}(k) \rightarrow 0$ für $|k| \rightarrow \infty$.

Hinweis: Besselsche Ungleichung und notwendige Bedingung von Reihenkonvergenz.

- b) Sei $a \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin((k+a)x) dx \rightarrow 0 \quad (|k| \rightarrow \infty).$$

Hinweis: Nehmen Sie zunächst an, dass f reellwertig ist. Nutzen Sie das Additionstheorem für den Sinus und Aufgabenteil a).

Bemerkung: Die obigen Aussagen gelten auch für $f \in R([-\pi, \pi], \mathbb{C})$.

Aufgabe 8 (Tutorium)

- a) Sei $a \in (0, \pi)$. Wir definieren die Funktion $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in [-a, a], \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Berechnen Sie die reelle Fourierreihe von f . Stellt sie in jedem Punkt $x \in [-\pi, \pi]$ die Funktion f dar? Ist die Fourierreihe stetig?

- b) Seien $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ und $f(x) := \cos(\alpha x)$, $x \in [-\pi, \pi]$. Berechnen Sie die Fourierreihe von f und folgern Sie mit dem Darstellungssatz 16.2 die Formel

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 - \alpha^2} = \frac{1}{2\alpha^2} - \frac{\pi}{2\alpha \tan(\alpha\pi)}.$$

- c) Berechnen Sie den Wert der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.

Hinweis: Fourierreihe von $f(x) := x^2$ (s. S.22, Skript) und Satz 16.4 (i).

Aufgabe 9 (Übung)

Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir den n -ten Fejér-Kern $F_n \in C_{\text{per}}([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ durch

$$F_n(x) := \frac{1}{2\pi n} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{|\ell| \leq k} e^{i\ell x}, \quad x \in [-\pi, \pi].$$

a) Sei $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie

$$\sum_{|\ell| \leq k} e^{i\ell x} = \frac{e^{i(k+1)x} - e^{-ikx}}{e^{ix} - 1}, \quad x \in [\pi, \pi] \setminus \{0\}.$$

Hinweis: Geometrische Summenformel.

b) Beweisen Sie

$$F_n(x) = \frac{1}{2\pi n} \frac{\sin^2(nx/2)}{\sin^2(x/2)}, \quad x \in [-\pi, \pi] \setminus \{0\}, n \in \mathbb{N}.$$

Hinweis: Nutzen Sie a) und die geometrische Summenformel. Nutzen Sie anschließend die Identität $\sin(x) = (e^{ix} - e^{-ix})/(2i)$, $x \in \mathbb{R}$.

c) Zeigen Sie:

- (i) $\int_{-\pi}^{\pi} F_n(x) dx = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$,
- (ii) $F_n(x) \geq 0$ für alle $x \in [-\pi, \pi]$, $n \in \mathbb{N}$,
- (iii) $F_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) gleichmäßig auf $[-\pi, \pi] \setminus [-\delta, \delta]$ für beliebiges $\delta \in (0, \pi)$.

Aufgabe 10 (Tutorium)

Sei $f \in C_{\text{per}}([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ stetig differenzierbar und auch $f' \in C_{\text{per}}([-\pi, \pi], \mathbb{C})$.

a) Zeigen Sie

$$\widehat{f'}(k) = ik\widehat{f}(k) \quad \text{für alle } k \in \mathbb{Z}.$$

b) Seien $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \leq n$. Zeigen Sie

$$\left| \sum_{m \leq |k| \leq n} \widehat{f}(k) e^{ikx} \right| \leq \|f'\| \left(\sum_{m \leq |k| \leq n} \frac{1}{k^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{für } x \in [-\pi, \pi].$$

Hinweis: Nutzen Sie a), die Cauchy-Schwarz Ungleichung und die Besselsche Ungleichung.

c) Folgern Sie aus b) und dem Darstellungssatz 16.2, dass die Fourierreihe von f gleichmäßig gegen f konvergiert.

Aufgabe 11 (Übung)

Sei $f \in C_{\text{per}}([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ und $\tilde{f}$ die 2π -periodische Fortsetzung von f auf $\mathbb{R}$. Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir $S_n f \in C_{\text{per}}([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ durch

$$(S_n f)(x) := \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{|\ell| \leq k} \widehat{f}(\ell) e^{i\ell x} \right), \quad x \in [-\pi, \pi].$$

Die Funktion $S_n f$ ist also das arithmetische Mittel der ersten n Partialsummen der Fourierreihe von f . Ziel dieser Aufgabe ist es zu zeigen, dass $S_n f$ gleichmäßig gegen f konvergiert und hieraus Satz 16.4 zu folgern.

a) Zeigen Sie

$$(S_n f)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(x-y) F_n(y) dy, \quad x \in [-\pi, \pi], n \in \mathbb{N},$$

wobei F_n der n -te Fejér-Kern aus Aufgabe 9 ist.

b) Zeigen Sie, dass $S_n f$ gleichmäßig gegen f konvergiert.

Hinweis: Schreiben Sie mit Hilfe von a) und Aufgabe 9 c) (i), (ii),

$$\begin{aligned} |(S_n f)(x) - f(x)| &= \left| \int_{-\pi}^{\pi} (\tilde{f}(x-y) - \tilde{f}(x)) F_n(y) dy \right| \\ &\leq \int_{-\delta}^{\delta} |\tilde{f}(x-y) - \tilde{f}(x)| F_n(y) dy + \int_{[-\pi, \pi] \setminus [-\delta, \delta]} |\tilde{f}(x-y) - \tilde{f}(x)| F_n(y) dy \end{aligned}$$

für $x \in [-\pi, \pi]$ und kleines, geschickt gewähltes $\delta \in (0, \pi)$ (hierbei ist $\int_{[-\pi, \pi] \setminus [-\delta, \delta]} := \int_{-\pi}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\pi}$). Schätzen Sie den ersten Term mit Hilfe der gleichmäßigen Stetigkeit von $\tilde{f}$ und Aufgabe 9 c) (i) ab, für den zweiten Term nutzen Sie die Beschränktheit von $\tilde{f}$ und Aufgabe 9 c) (iii).

c) Folgern Sie aus b), dass $\|S_n f - f\| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), wobei $\|\cdot\|$ die Norm in $C_{\text{per}}([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ bezeichnet.

d) Beweisen Sie Satz 16.4. (Hinweis: Satz 15.8 (6) mit $U_n := \text{lin}(\{e_k : |k| \leq n\})$, $n \in \mathbb{N}_0$, und beachten Sie $Sf_n \in U_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, und Aufgabenteil c).)

Aufgabe 12 (Tutorium)

In dieser Aufgabe wollen wir die punktweise Konvergenz der Fourierreihe unter etwas stärkeren Voraussetzungen als in Satz 16.2 beweisen.

Sei $f \in C_{\text{per}}([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ und $\tilde{f}$ die 2π -periodische Fortsetzung von f auf $\mathbb{R}$. Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir $P_n f, D_n \in C_{\text{per}}([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ durch

$$\begin{aligned} (P_n f)(x) &:= \sum_{|k| \leq n} \hat{f}(k) e^{ikx}, \quad x \in [-\pi, \pi], \\ D_n(x) &:= \frac{1}{2\pi} \sum_{|k| \leq n} e^{ikx}, \quad x \in [-\pi, \pi]. \end{aligned}$$

Die Funktion $P_n f$ ist also die n -te Partialsumme der Fourierreihe von f . Die Funktion D_n heißt n -ter *Dirchlet-Kern*.

a) Zeigen Sie $\int_{-\pi}^{\pi} D_n(x) dx = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

b) Zeigen Sie

$$(P_n f)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(x-y) D_n(y) dy, \quad x \in [-\pi, \pi], n \in \mathbb{N}.$$

c) Zeigen Sie:

$$D_n(x) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin((n + \frac{1}{2})x)}{\sin(x/2)}, \quad x \in [-\pi, \pi] \setminus \{0\}, n \in \mathbb{N}.$$

Hinweis: Aufgabe 9 a) und die Identität $\sin(x) = (e^{ix} - e^{-ix})/(2i)$, $x \in \mathbb{R}$.

d) Sei nun f zusätzlich differenzierbar. Zeigen Sie, dass die Fourierreihe von f punktweise gegen f konvergiert, d.h., $(P_n f)(x) \rightarrow f(x)$ ($n \rightarrow \infty$) für alle $x \in [-\pi, \pi]$.

Hinweis: Schreiben Sie mit Hilfe von a), b) und c)

$$|(P_n f)(x) - f(x)| = \left| \int_{-\pi}^{\pi} (\tilde{f}(x-y) - \tilde{f}(x)) D_n(y) dy \right| = \left| \int_{-\pi}^{\pi} g(y) \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)y\right) dy \right|$$

mit $g(y) := (2\pi)^{-1}(\tilde{f}(x-y) - \tilde{f}(x))/\sin(y/2)$. Zeigen Sie, dass g stetig, also insbesondere integrierbar ist, und nutzen Sie nun Aufgabe 7 b) und die Bemerkung in Aufgabe 7.