Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
M.Sc. Yonas Mesfun

SS 2020
30.04.2020

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

2. Übungsblatt

Aufgabe 7 (Übung)

Sei $f \in C_{\text{per}}([-\pi, \pi], \mathbb{C})$.

a) Zeigen Sie $\hat{f}(k) \to 0$ für $|k| \to \infty$.
Hinweis: Besselsche Ungleichung und notwendige Bedingung von Reihenkonvergenz.

b) Sei $a \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin((k+a)\,x)\,dx \to 0 \quad (\,|k| \to \infty\,).$$

Hinweis: Nehmen Sie zunächst an, dass f reellwertig ist. Nutzen Sie das Additionstheorem für den Sinus und Aufgabenteil a).
Bemerkung: Die obigen Aussagen gelten auch für $f \in R([-\pi, \pi], \mathbb{C})$.

Lösungsvorschlag:

Für $k \in \mathbb{Z}$ sei wie immer $e_k \in C_{\text{per}}([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ definiert durch $e_k(x) := e^{ikx}, x \in [-\pi, \pi]$.

a) Sei $f \in C_{\text{per}}([-\pi, \pi], \mathbb{C})$. Wie aus der Vorlesung bekannt ist, ist $\{e_k\colon\ k \in \mathbb{Z}\}$ ein abzählbar unendliches Orthonormalsystem in $C_{\text{per}}([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ und es gilt $\hat{f}(k) = (f|e_k)$ für alle $k \in \mathbb{Z}$. Nach der Besselschen Ungleichung, Satz 15.9 (2), folgt dann

$$\sum_{k=1}^{n} |\hat{f}(k)|^2 = \sum_{k=1}^{n} |(f|e_k)|^2 \le \|f\| \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Damit konvergiert die Reihe auf der linken Seite, weshalb nach der HM I ihre Reihenglieder eine Nullfolge bilden. Also folgt

$$|\hat{f}(k)|^2 \to 0 \quad (k \to \infty)$$

und damit auch

$$\hat{f}(k) \to 0 \quad (k \to \infty).$$

Ersetzen wir in der oberen Reihe $\hat{f}(k)$ durch $\hat{f}(-k)$, sehen wir, dass auch $\hat{f}(-k) \to 0$ $(k \to \infty)$ gilt. Zusammen folgt also

$$\hat{f}(k) \to 0 \quad (\,|k| \to \infty\,).$$

b) Seien $a \in \mathbb{R}$ und f zunächst reellwertig. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass $f(-\pi) = f(\pi) = 0$ ist.
(*Begründung*: In der Tat, falls dies nicht der Fall ist, können wir

$$g\colon [-\pi,\pi] \to \mathbb{C},\ g(x) = f(x) - f(\pi),$$

definieren. Dann liegt mit f auch g in $C_{\text{per}}([-\pi,\pi],\mathbb{C})$ und es gilt $g(\pi) = g(-\pi) = 0$, wie man sich leicht klar macht. Da die Funktionen $x \mapsto \sin((k+a)x)$, $x \in [-\pi,\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$, ungerade sind, folgt ferner

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\sin((k+a)x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin((k+a)x)\,dx, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Weil obige Integrale gleich sind, reicht es dann die Aussage für g zu beweisen.)
Nach dem Additionstheorem für den Sinus ist

$$\begin{aligned}\sin((k+a)x) &= \sin(ax)\cos(kx) + \cos(ax)\sin(kx)\\ &= h_1(x)\cos(kx) + h_2(x)\sin(kx), \quad x \in [-\pi,\pi], k \in \mathbb{Z},\end{aligned}$$

wobei $h_1(x) := \sin(ax)$ und $h_2(x) := \cos(ax)$. Damit ist

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin((k+a)x)dx &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)h_1(x)\cos(kx)dx + \int_{-\pi}^{\pi} f(x)h_2(x)\sin(kx)dx\\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)h_1(x)(\operatorname{Re} e_{-k})(x)dx - \int_{-\pi}^{\pi} f(x)h_2(x)(\operatorname{Im} e_{-k})(x)dx\\ &= \operatorname{Re}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)h_1(x)\,e_{-k}(x)dx - \operatorname{Im}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)h_2(x)\,e_{-k}(x)dx\\ &= 2\pi\,\underbrace{\operatorname{Re}\widehat{f\cdot h_1}(k)}_{\xrightarrow{a)}0} - 2\pi\,\underbrace{\operatorname{Im}\widehat{f\cdot h_2}(k)}_{\xrightarrow{a)}0} \longrightarrow 0 \quad (\,|k| \to \infty\,),\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt einerseits ausgenutzt haben, dass wegen $f(\pi) = f(-\pi) = 0$ die Funktionen $f \cdot h_1$ und $f \cdot h_2$ in $C_{\text{per}}([-\pi,\pi],\mathbb{C})$ liegen (und wir damit a) anwenden durften) und andererseits dass eine komplexe Folge genau dann eine (komplexe) Nullfolge ist, wenn sowohl die Folge der Real- als auch die Folge der Imaginärteile reelle Nullfolgen sind. Ist nun $f \in C_{\text{per}}([-\pi,\pi],\mathbb{C})$ komplexwertig, so gilt auch $\operatorname{Re}(f), \operatorname{Im}(f) \in C_{\text{per}}([-\pi,\pi],\mathbb{C})$ und somit nach dem bereits Bewiesenen

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx+a)dx = \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}(\operatorname{Re} f)(x)\sin(kx+a)dx}_{\longrightarrow 0} + i\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}(\operatorname{Im} f)(x)\sin(kx+a)dx}_{\longrightarrow 0} \longrightarrow 0 \quad (\,|k| \to \infty\,).$$

Damit ist die Aussage bewiesen.

Bemerkung: Man kann zeigen, dass die Besselsche Ungleichung auch für $f \in R([-\pi,\pi],\mathbb{C})$ gilt. Da wir für die obigen Aussagen nur diese gebraucht haben, gelten die Aussagen auch für $f \in R([-\pi,\pi],\mathbb{C})$. Die Aussage in Aufgabenteil a) wird in der Literatur auch *Lemma von Riemann-Lebesgue* genannt.

Aufgabe 8 (Tutorium)

a) Sei $a \in (0, \pi)$. Wir definieren die Funktion $f\colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in [-a, a], \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Berechnen Sie die reelle Fourierreihe von f. Stellt sie in jedem Punkt $x \in [-\pi, \pi]$ die Funktion f dar? Ist die Fourierreihe stetig?

b) Seien $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ und $f(x) := \cos(\alpha x)$, $x \in [-\pi, \pi]$. Berechnen Sie die Fourierreihe von f und folgern Sie mit dem Darstellungsssatz 16.2 die Formel

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 - \alpha^2} = \frac{1}{2\alpha^2} - \frac{\pi}{2\alpha \tan(\alpha\pi)}.$$

c) Berechnen Sie den Wert der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.
Hinweis: Fourierreihe von $f(x) := x^2$ (s. S.22, Skript) und Satz 16.4 (i).

Lösungsvorschlag:

Für $k \in \mathbb{Z}$ sei wie immer $e_k \in C_{\text{per}}([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ definiert durch $e_k(x) := e^{ikx}$, $x \in [-\pi, \pi]$.

a) Wir berechnen die komplexen Fourierkoeffizienten $c_k = \hat{f}(k)$ von f, $k \in \mathbb{Z}$. Für $k = 0$ erhalten wir

$$c_0 = \hat{f}(0) = (f|e_0) = (f|1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^{a} dx = \frac{a}{\pi}.$$

Für $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ berechnen wir

$$c_k = \hat{f}(k) = (f|e_k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^{a} e^{-ikx} dx = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{-ikx}}{-ik} \bigg|_{-a}^{a} = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{ika} - e^{-ika}}{ik} = \frac{\sin(ka)}{\pi k},$$

wobei wir im letzten Schritt die Eulerformel angewendet haben. Also sind die reellen Fourierkoeffizienten gegeben durch

$$a_0 = 2c_0 = \frac{2a}{\pi}, \quad a_k = c_k + c_{-k} = \frac{2\sin(ka)}{\pi k}, \quad b_k = i(c_k - c_{-k}) = 0, \qquad k \in \mathbb{N},$$

sodass die reelle Fourierreihe von f durch

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) = \frac{a}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\sin(ka)}{\pi k} \cos(kx).$$

gegeben ist. Mit der Zerlegung $\{-\pi, -a, a, \pi\}$ ist f stückweise glatt. Daher folgt aus dem Darstellungssatz 16.2

$$\frac{a}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\sin(ka)}{\pi k} \cos(kx) = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}, \quad x \in [-\pi, \pi].$$

Insbesondere folgt für $x = a$,

$$\frac{a}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\sin(ka)}{\pi k} \cos(ka) = \frac{f(a+) + f(a-)}{2} = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2} \neq f(a) = 1.$$

Analog folgt für $x = -a$

$$\frac{a}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\sin(ka)}{\pi k} \cos(k(-a)) = \frac{f((-a)+) + f((-a)-)}{2} = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2} \neq f(-a) = 1.$$

Also wird f in den Punkten $x \in \{-a, a\}$ nicht durch seine Fourierreihe dargestellt. In allen anderen Punkten ist f stetig. Nach dem Darstellungssatz 16.2 wird dort f also durch seine Fourierreihe dargestellt. Zusammenfassend haben wir also

$$\frac{a}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\sin(ka)}{\pi k} \cos(kx) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{für } x \in \{-a, a\} \\ f(x) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Damit ist auch klar, dass die Fourierreihe in den Punkten $x \in \{-a, a\}$ nicht stetig ist.

b) Sei $k \in \mathbb{Z}$. Wir berechnen

$$\begin{aligned} 2\pi c_k = 2\pi \hat{f}(k) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e_k(x) dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\alpha x} + e^{-i\alpha x}}{2} e^{-ikx} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(\alpha-k)x} + e^{-(\alpha+k)x} dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{e^{i(\alpha-k)x}}{i(\alpha-k)} \bigg|_{-\pi}^{\pi} + \frac{e^{-i(\alpha+k)x}}{-i(\alpha+k)} \bigg|_{-\pi}^{\pi} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{(-1)^k}{i(\alpha-k)} (e^{i\alpha\pi} - e^{-i\alpha\pi}) + \frac{(-1)^k}{i(\alpha+k)} (e^{i\alpha\pi} - e^{-i\alpha\pi}) \right] \\ &= (-1)^k \sin(\alpha\pi) \left(\frac{1}{\alpha-k} + \frac{1}{\alpha+k} \right) \\ &= (-1)^k \frac{2\alpha \sin(\alpha\pi)}{\alpha^2 - k^2}. \end{aligned}$$

Nach dem Darstellungssatz 16.2 wird f durch seine Fourierrreihe dargestellt, d.h., es gilt also

$$\cos(\alpha x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\pi} \frac{\alpha \sin(\alpha\pi)}{\alpha^2 - k^2} e^{ikx}, \quad x \in [-\pi, \pi].$$

Setzen wir $x = \pi$, erhalten wir hieraus

$$\begin{aligned} \cos(\alpha\pi) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\pi} \frac{\alpha \sin(\alpha\pi)}{\alpha^2 - k^2} (-1)^k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{\alpha \sin(\alpha\pi)}{\alpha^2 - k^2} \\ &= \frac{\alpha \sin(\alpha\pi)}{\pi} \left(\frac{1}{\alpha^2} - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 - \alpha^2} \right). \end{aligned}$$

Durch Auflösen der Gleichung nach der Reihe erhalten wir schließlich die gewünschte Identität

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 - \alpha^2} = \frac{1}{2\alpha^2} - \frac{\pi \cos(\alpha\pi)}{2\alpha \sin(\alpha\pi)} = \frac{1}{2\alpha^2} - \frac{\pi}{2\alpha \tan(\alpha\pi)}.$$

c) Nach S.22, Skript, sind die komplexen Fourierkoeffizienten von $f(x) = x^2$, $x \in [-\pi, \pi]$, gegeben durch

$$c_0 = \hat{f}(0) = \frac{\pi^2}{3}, \quad c_k = \hat{f}(k) = (-1)^k \frac{2}{k^2}, \qquad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

Dann gilt

$$\|f\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^4 \, dx = \frac{1}{2\pi} \frac{x^5}{5} \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi^4}{5}.$$

Nun folgt mit Satz 16.4

$$\frac{\pi^4}{9} + 8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = |\hat{f}(0)|^2 + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(|\hat{f}(k)|^2 + |\hat{f}(-k)|^2 \right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{|k|\le n} |\hat{f}(k)|^2 \overset{16.4}{=} \|f\|^2 = \frac{\pi^4}{5}.$$

Auflösen der Gleichung nach der Reihe ergibt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Aufgabe 9 (Übung)

Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir den *n-ten Fejér-Kern* $F_n \in C_{\text{per}}([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ durch

$$F_n(x) := \frac{1}{2\pi n} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{|\ell|\le k} e^{i\ell x}, \quad x \in [-\pi, \pi].$$

a) Sei $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie

$$\sum_{|\ell|\le k} e^{i\ell x} = \frac{e^{i(k+1)x} - e^{-ikx}}{e^{ix} - 1}, \quad x \in [-\pi, \pi] \setminus \{0\}.$$

Hinweis: Geometrische Summenformel.

b) Beweisen Sie

$$F_n(x) = \frac{1}{2\pi n} \frac{\sin^2(nx/2)}{\sin^2(x/2)}, \quad x \in [-\pi, \pi] \setminus \{0\}, n \in \mathbb{N}.$$

Hinweis: Nutzen Sie a) und die geometrische Summenformel. Nutzen Sie anschließend die Identität $\sin(x) = (e^{ix} - e^{-ix})/(2i)$, $x \in \mathbb{R}$.

c) Zeigen Sie:

(i) $\int_{-\pi}^{\pi} F_n(x) \, dx = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$,

(ii) $F_n(x) \ge 0$ für alle $x \in [-\pi, \pi], n \in \mathbb{N}$,

(iii) $F_n \to 0$ $(n \to \infty)$ gleichmäßig auf $[-\pi, \pi] \setminus [-\delta, \delta]$ für beliebiges $\delta \in (0, \pi)$.

Lösungsvorschlag:

a) Seien $k \in \mathbb{N}$ und $x \in [\pi, \pi] \setminus \{0\}$. Wir berechnen

$$\sum_{|\ell| \leq k} e^{i\ell x} = e^{-ikx} \sum_{\ell=0}^{2k} e^{i\ell x} = e^{-ikx} \frac{e^{i(2k+1)x} - 1}{e^{ix} - 1} = \frac{e^{i(k+1)x} - e^{-ikx}}{e^{ix} - 1},$$

wobei wir für die zweite Gleichung die geometrische Summenformel

$$\sum_{\ell=0}^{n} w^\ell = \frac{w^{n+1} - 1}{w - 1}, \quad w \in \mathbb{C} \setminus \{1\}, n \in \mathbb{N}, \tag{$*$}$$

mit $w := e^{ix} \neq 1$ und $n := 2k$ genutzt haben.

b) Seien $n \in \mathbb{N}$ und $x \in [-\pi, \pi] \setminus \{0\}$. Wir setzen $w := e^{ix}$. Mit Aufgabenteil a) und der geometrischen Summenformel folgt

$$\begin{aligned} 2\pi n F_n(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{|\ell| \leq k} w^\ell \overset{\text{a)}}{=} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{w^{k+1} - w^{-k}}{w - 1} \overset{(*)}{=} \frac{1}{w-1} \left(w \frac{w^n - 1}{w - 1} - \frac{w^{-n} - 1}{w^{-1} - 1} \right) \\ &= \frac{1}{w-1} \left[\frac{w(w^{-1} - 1)(w^n - 1) - (w - 1)(w^{-n} - 1)}{(w-1)(w^{-1} - 1)} \right] \\ &= \frac{1}{w-1} \left[\frac{-(w^n - 1) - (w^{-n} - 1)}{(w^{-1} - 1)} \right] \\ &= \frac{w^n - 2 + w^{-n}}{w - 2 + w^{-1}} = \frac{\left(w^{\frac{n}{2}} - w^{-\frac{n}{2}}\right)^2}{\left(w^{\frac{1}{2}} - w^{-\frac{1}{2}}\right)^2} = \frac{\sin^2((n/2)x)}{\sin^2(x/2)}, \end{aligned}$$

wobei wir für die letzte Gleichung die Eulerformel benutzt haben.

c) (i) Seien $n \in \mathbb{N}$ und $e_k \in C_{\text{per}}([-\pi, \pi], \mathbb{C})$, $e_k(x) := e^{ikx}$, $x \in [-\pi, \pi]$, $k \in \mathbb{Z}$. Wir berechnen

$$\int_{-\pi}^{\pi} F_n(x)\, dx = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{|\ell| \leq k} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e_\ell(x)\, dx = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{|\ell| \leq k} (e_\ell | e_0) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} 1 = 1,$$

da $\{e_k \colon : k \in \mathbb{Z}\}$ ein Orthonormalsystem ist.

(ii) Sei $n \in \mathbb{N}$. Für $x \in [-\pi, \pi] \setminus \{0\}$ folgt $F_n(x) \geq 0$ direkt aus Aufgabenteil b). Für $x = 0$ folgt dies unmittelbar aus der Definition von F_n. Tatsächlich gilt für den Funktionswert

$$F_n(0) = \frac{1}{2\pi n} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{|\ell| \leq k} 1 = \frac{1}{2\pi n} \sum_{k=0}^{n-1} (2k+1) = \frac{1}{2\pi n} \left(2 \frac{(n-1)n}{2} + n \right) = \frac{n}{2\pi} \geq 0,$$

wobei wir die Gaußsche Summenformel angewendet haben.

(iii) Seien $\delta \in (0, \pi)$ und $I_\delta := [-\pi, \pi] \setminus [-\delta, \delta]$. Da die Abbildung $x \mapsto \sin^2(x/2)$, $x \in [-\pi, \pi]$, monoton wachsend auf $[0, \pi]$ und monoton fallend auf $[-\pi, 0]$ ist, folgt

$$\sin^2(\delta/2) \leq \sin^2(x/2), \quad x \in I_\delta.$$

Damit folgt für alle $x \in I_\delta$

$$|F_n(x)| \overset{\text{(ii)}}{=} F_n(x) = \frac{1}{2\pi n} \frac{\sin^2((n/2)x)}{\sin^2(x/2)} \leq \frac{1}{2\pi n} \frac{\sin^2((n/2)x)}{\sin^2(\delta/2)} \leq \frac{1}{2\pi \sin^2(\delta/2)} \cdot \frac{1}{n}$$

und damit

$$\max_{x \in I_\delta} |F_n(x)| \overset{\text{(ii)}}{=} \max_{x \in I_\delta} F_n(x) \leq \frac{1}{2\pi \sin^2(\delta/2)} \cdot \frac{1}{n} \longrightarrow 0 \ (n \to \infty).$$

Also konvergiert (F_n) gleichmäßig gegen 0 auf I_δ.

Aufgabe 10 (Tutorium)

Sei $f \in C_{\text{per}}([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ stetig differenzierbar und auch $f' \in C_{\text{per}}([-\pi, \pi], \mathbb{C})$.

a) Zeigen Sie

$$\widehat{f'}(k) = ik\hat{f}(k) \quad \text{für alle } k \in \mathbb{Z}.$$

b) Seien $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \leq n$. Zeigen Sie

$$\left| \sum_{m \leq |k| \leq n} \hat{f}(k) e^{ikx} \right| \leq \|f'\| \left(\sum_{m \leq |k| \leq n} \frac{1}{k^2} \right)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{für } x \in [-\pi, \pi].$$

Hinweis: Nutzen Sie a), die Cauchy-Schwarz Ungleichung und die Besselsche Ungleichung.

c) Folgern Sie aus b) und dem Darstellungssatz 16.2, dass die Fourierreihe von f gleichmäßig gegen f konvergiert.

Lösungsvorschlag:

a) Für $k \in \mathbb{Z}$ sei wie immer $e_k \in C_{\text{per}}([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ definiert durch $e_k(x) := e^{ikx}$, $x \in [-\pi, \pi]$. Ist $k = 0$, so ist die rechte Seite der zu zeigenden Gleichung (trivialerweise) 0 und die linke nach dem Hauptsatz auch, denn

$$\widehat{f'}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) dx = \frac{1}{2\pi} \left(f(\pi) - f(-\pi) \right) = 0,$$

da $f \in C_{\text{per}}([-\pi, \pi], \mathbb{C})$. Also ist die Gleichung im Fall $k = 0$ erfüllt. Ist hingegen $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, so folgt aus partieller Integration

$$\widehat{f'}(k) = (f'|e_k) = (2\pi)^{-1} \underbrace{f(x)e_k(x)|_{-\pi}^{\pi}}_{=0} - (f|e_k') = ik(f|e_k) = ik\hat{f}(k),$$

wobei wir ausgenutzt haben, dass der Randterm null ist, weil $fe_k \in C_{\text{per}}([-\pi, \pi], \mathbb{C})$, und dass $e_k' = -ike_k$.

Also ist die Gleichung für alle $k \in \mathbb{Z}$ erfüllt.

b) Seien $m, n \in \mathbb{N}$ und $m \leq n$. Dann gilt nach a), Cauchy Schwarz (CS) und der Besselschen Ungleichung (BU) für alle $x \in [-\pi, \pi]$:

$$\left| \sum_{m \leq |k| \leq n} \hat{f}(k) e^{ikx} \right| \leq \sum_{m \leq |k| \leq n} |\hat{f}(k)|$$

$$\overset{a)}{=} \sum_{m \leq |k| \leq n} \left| \widehat{f'}(k) \frac{1}{k} \right| \overset{(CS)}{\leq} \left(\sum_{m \leq |k| \leq n} |\widehat{f'}(k)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{m \leq |k| \leq n} \frac{1}{k^2} \right)^{\frac{1}{2}} \overset{(BU)}{\leq} \|f'\| \left(\sum_{m \leq |k| \leq n} \frac{1}{k^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

c) Sei für $n \in \mathbb{N}$ die Funktion

$$(P_n f)(x) := \sum_{|k| \leq n} \hat{f}(k) e^{ikx}, \quad x \in [-\pi, \pi],$$

die n-te Partialsumme der Fourierreihe von f. Sind nun $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \leq n$, folgt

$$\max_{x \in [-\pi,\pi]} |(P_n f - P_m f)(x)| = \max_{x \in [-\pi,\pi]} \left| \sum_{m+1 \leq |k| \leq n} \hat{f}(k) e^{ikx} \right| \overset{b)}{\leq} \|f'\| \left(\sum_{m+1 \leq |k| \leq n} \frac{1}{k^2} \right)^{\frac{1}{2}} \to 0 \quad (m, n \to \infty),$$

nach dem Cauchy-Kriterium für konvergente Reihen. Damit ist insbesondere $((P_n f)(x))_{n \in \mathbb{N}}$ für jedes $x \in [-\pi, \pi]$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{C}$, und da $\mathbb{C}$ vollständig ist, existiert somit $Pf(x) := \lim_{n \to \infty} (P_n f)(x)$ für alle $x \in [-\pi, \pi]$. Der Grenzübergang $n \to \infty$ in der oberen Ungleichungskette liefert

$$\max_{x \in [-\pi,\pi]} |(Pf - P_m f)(x)| \leq \|f'\| \left(\sum_{|k| \geq m+1} \frac{1}{k^2} \right)^{\frac{1}{2}},$$

wobei der Reihenrest auf der rechten Seite für $m \to \infty$ gegen 0 konvergiert. Damit konvergiert also $(P_n f)$ sogar gleichmäßig gegen Pf. Nach dem Darstellungsssatz 16.2 konvergiert aber (Pf_n) auch punktweise gegen f. Da $Pf_n \to Pf$ gleichmäßig insbesondere $Pf_n \to Pf$ punktweise impliziert, folgt aus der Eindeutigkeit des punktweisen Grenzwertes $Pf = f$. Damit konvergiert Pf_n gleichmäßig gegen f.

Aufgabe 11 (Übung)

Sei $f \in C_{\text{per}}([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ und $\tilde{f}$ die 2π-periodische Fortsetzung von f auf $\mathbb{R}$. Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir $S_n f \in C_{\text{per}}([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ durch

$$(S_n f)(x) := \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{|\ell| \leq k} \hat{f}(\ell) e^{i\ell x} \right), \qquad x \in [\pi, \pi].$$

Die Funktion $S_n f$ ist also das arithmetische Mittel der ersten n Partialsummen der Fourierreihe von f. Ziel dieser Aufgabe ist es zu zeigen, dass Sf_n gleichmäßig gegen f konvergiert und hieraus Satz 16.4 zu folgern.

a) Zeigen Sie

$$(S_n f)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(x - y) \, F_n(y) \, dy, \quad x \in [\pi, \pi], n \in \mathbb{N},$$

wobei F_n der *n-te* Fejér-Kern aus Aufgabe 9 ist.

b) Zeigen Sie, dass $S_n f$ gleichmäßig gegen f konvergiert.
Hinweis: Schreiben Sie mit Hilfe von a) und Aufgabe 9 c) (i), (ii),

$$\begin{aligned}|(S_n f)(x) - f(x)| &= \left|\int_{-\pi}^{\pi} (\tilde{f}(x-y) - \tilde{f}(x))F_n(y)dy\right| \\ &\leq \int_{-\delta}^{\delta} |\tilde{f}(x-y) - \tilde{f}(x)|\, F_n(y)dy + \int_{[-\pi,\pi]\setminus[-\delta,\delta]} |\tilde{f}(x-y) - \tilde{f}(x)|\, F_n(y)dy\end{aligned}$$

für $x \in [-\pi, \pi]$ und kleines, geschickt gewähltes $\delta \in (0, \pi)$ (hierbei ist $\int_{[-\pi,\pi]\setminus[-\delta,\delta]} := \int_{-\pi}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\pi}$). Schätzen Sie den ersten Term mit Hilfe der gleichmäßigen Stetigkeit von $\tilde{f}$ und Aufgabe 9 c) (i) ab, für den zweiten Term nutzen Sie die Beschränktheit von $\tilde{f}$ und Aufgabe 9 c) (iii).

c) Folgern Sie aus b), dass $\|S_n f - f\| \to 0$ $(n \to \infty)$, wobei $\|\cdot\|$ die Norm in $C_{\text{per}}([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ bezeichnet.

d) Beweisen Sie Satz 16.4. (Hinweis: Satz 15.8 (6) mit $U_n := \text{lin}(\{e_k \colon |k| \leq n\})$, $n \in \mathbb{N}_0$, und beachten Sie $Sf_n \in U_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, und Aufgabenteil c).)

Lösungsvorschlag:

Für $k \in \mathbb{Z}$ sei wie immer $e_k \in C_{\text{per}}([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ definiert durch $e_k(x) := e^{ikx}$, $x \in [-\pi, \pi]$.

a) Seien $x \in [-\pi, \pi]$, $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}(S_n f)(x) &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{|\ell|\leq k} \hat{f}(\ell)e_\ell(x) = \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{|\ell|\leq k} \frac{1}{2\pi n}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)e_{-\ell}(y)e_\ell(x)dy \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(y)\left(\frac{1}{2\pi n}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{|\ell|\leq k} e_\ell(x-y)\right)dy = \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(x-y)\left(\frac{1}{2\pi n}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{|\ell|\leq k} e_\ell(y)\right)dy \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(x-y)F_n(y)\,dy,\end{aligned}$$

wobei wir für die vorletzte Gleichung die Substitution $y \mapsto x - y$ und die 2π-Periodizität des Integranden benutzt haben.

b) Sei $\varepsilon > 0$. Wir müssen zeigen, dass $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, sodass

$$\max_{x\in[-\pi,\pi]} |(S_n f)(x) - f(x)| \leq \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq n_0.$$

Hierfür sammeln wir vorerst einige Fakten. Da $[-\pi, \pi]$ kompakt und f stetig ist, ist f sogar gleichmäßig stetig auf $[-\pi, \pi]$. Damit ist aber auch die 2π-periodische Fortsetzung $\tilde{f}$ gleichmäßig stetig auf $\mathbb{R}$. Deshalb existiert $\delta \in (0, \pi)$, sodass

$$|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R} \text{ mit } |x-y| < \delta. \tag{1}$$

Weiterhin ist f als stetige Funktion auf dem kompakten Intervall $[-\pi, \pi]$ beschränkt, womit auch $\tilde{f}$ beschränkt ist. Deshalb existiert $C > 0$ mit

$$|\tilde{f}(x)| \leq C \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Ferner konvergiert nach Aufgabe 9 c) (iii) die Funktionenfolge (F_n) gleichmäßig gegen 0 auf $[-\pi,\pi]\setminus[-\delta,\delta]$. Insbesondere können wir also ein $n_0 \in \mathbb{N}$ finden, sodass

$$\max_{x\in[-\pi,\pi]\setminus[-\delta,\delta]} F_n(x) \le \frac{\varepsilon}{8C(\pi-\delta)} \quad \text{für alle } n \ge n_0. \tag{3}$$

Nun folgt für alle $n \ge n_0$ und $x \in [-\pi,\pi]$ unter Anwendung von Aufgabenteil a), Gleichungen (1)-(3) und Eigenschaften (i)-(iii) aus Aufgabe 9 c), dass

$$\begin{aligned}
|(S_nf)(x) - f(x)| &\overset{\text{a)},}{\underset{\text{(i)}}{=}} \left| \int_{-\pi}^{\pi} \tilde f(x-y)F_n(y)\,dy - \int_{-\pi}^{\pi} \tilde f(x)F_n(y)\,dy \right| \\
&= \left| \int_{-\pi}^{\pi} (\tilde f(x-y) - \tilde f(x))F_n(y)\,dy \right| \\
&\overset{\text{(ii)}}{\le} \int_{-\delta}^{\delta} |\tilde f(x-y) - \tilde f(x)|\, F_n(y)\,dy + \int_{[-\pi,\pi]\setminus[-\delta,\delta]} |\tilde f(x-y) - \tilde f(x)|\, F_n(y)\,dy \\
&\overset{(1)}{\le} \underbrace{\frac{\varepsilon}{2}\int_{-\delta}^{\delta} F_n(y)\,dy}_{\le 1 \text{ nach (i), (ii)}} + \int_{[-\pi,\pi]\setminus[-\delta,\delta]} \underbrace{\left(|\tilde f(x-y)| + |\tilde f(x)|\right)}_{\le 2C \text{ nach (2)}} F_n(y)\,dy \\
&\le \frac{\varepsilon}{2} + 2C\cdot 2(\pi-\delta)\cdot \max_{x\in[-\pi,\pi]\setminus[\delta,\delta]} F_n(x) \\
&\overset{(3)}{\le} \frac{\varepsilon}{2} + 2C\cdot 2(\pi-\delta)\cdot \frac{\varepsilon}{8C(\pi-\delta)} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Da $x \in [-\pi,\pi]$ und $n \ge n_0$ beliebig waren, folgt also

$$\max_{x\in[-\pi,\pi]} |(S_nf)(x) - f(x)| \le \varepsilon \quad \text{für alle } n \ge n_0.$$

Damit ist der Beweis abgeschlossen.

c) Nach Aufgabenteil b) gilt

$$\max_{x\in[-\pi,\pi]} |(f - Sf_n)(x)| \longrightarrow 0 \quad (n\to\infty).$$

Insbesondere existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass

$$|(f - Sf_n)(x)| \le 1 \quad \text{für alle } x \in [-\pi,\pi], n \ge n_0.$$

Hieraus folgt

$$|(f - Sf_n)(x)|^2 \le |(f - Sf_n)(x)| \quad \text{für alle } x \in [-\pi,\pi], n \ge n_0$$

und damit auch

$$\max_{x\in[-\pi,\pi]} |(f - Sf_n)(x)|^2 \le \max_{x\in[-\pi,\pi]} |(f - Sf_n)(x)| \quad \text{für alle } n \ge n_0.$$

Also ist auch $(\max_{x\in[-\pi,\pi]} |(f - Sf_n)(x)|^2)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge. Es folgt

$$\begin{aligned}
\|f - S_nf\|^2 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |(f - Sf_n)(x)|^2\,dx \\
&\le \left(\max_{x\in[-\pi,\pi]} |(f - Sf_n)(x)|^2\right) \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dy = \max_{x\in[-\pi,\pi]} |(f - Sf_n)(x)|^2 \longrightarrow 0 \ (n\to\infty).
\end{aligned}$$

Also konvergiert (S_nf) gegen f in $(C_{\text{per}}([-\pi,\pi],\mathbb{C}), \|\cdot\|)$.

d) Sei $V := (C_{\text{per}}([-\pi,\pi],\mathbb{C}), \|\cdot\|)$. Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei $U_n := \text{lin}(\{e_k : |k| \le n\}$. Weiter sei P_n der in Satz 15.8 definierte Orthogonalprojektor auf U_n, d.h.,

$$P_n : V \to V,\ P_n f = \sum_{|k|\le n} (f|e_k)e_k = \sum_{|k|\le n} \hat{f}(k)e_k.$$

Wir bemerken, dass $P_n f$ gerade die n-te Partialsumme der Fourierreihe von f ist. Da für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Funktion Sf_n eine Linearkombination der Funktionen e_k, $|k| \le n-1$, ist, liegt Sf_n in $U_{n-1} \subseteq U_n$. Mit Satz 15.8 (6) folgt dann aber $\|f - P_n f\| \le \|f - S_n f\|$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit folgt aber mit Aufgabenteil c)

$$\|f - P_n f\| \le \|f - S_n f\| \xrightarrow{\text{c)}} 0 \quad (n \to \infty).$$

Dies ist präzise die Aussage 16.4 (2). Wegen $\hat{f}(k) = (f|e_k)$, $k \in \mathbb{Z}$, ist aber nach Satz 15.9 (3) die Aussage 16.4 (2) einerseits äquivalent zur Aussage 16.4 (1), und andererseits äquivalent zur Aussage, dass $U := \bigcup_{n=0}^{\infty} U_n = \{e_k : k \in \mathbb{Z}\}$ ein vollständiges Orthonormalsystem in V ist. Damit ist alles gezeigt.

Aufgabe 12 (Tutorium)

In dieser Aufgabe wollen wir die punktweise Konvergenz der Fourierreihe unter etwas stärkeren Voraussetzungen als in Satz 16.2 beweisen.

Sei $f \in C_{\text{per}}([-\pi,\pi],\mathbb{C})$ und $\tilde{f}$ die 2π-periodische Fortsetzung von f auf $\mathbb{R}$. Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir $P_n f, D_n \in C_{\text{per}}([-\pi,\pi],\mathbb{C})$ durch

$$(P_n f)(x) := \sum_{|k|\le n} \hat{f}(k)e^{ikx}, \quad x \in [-\pi,\pi],$$
$$D_n(x) := \frac{1}{2\pi}\sum_{|k|\le n} e^{ikx}, \quad x \in [-\pi,\pi].$$

Die Funktion $P_n f$ ist also die n-te Partialsumme der Fourierreihe von f. Die Funktion D_n heißt *n-ter Dirchlet-Kern.*

a) Zeigen Sie $\int_{-\pi}^{\pi} D_n(x)dx = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

b) Zeigen Sie

$$(P_n f)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(x-y)\, D_n(y)dy, \quad x \in [-\pi,\pi], n \in \mathbb{N}.$$

c) Zeigen Sie:

$$D_n(x) = \frac{1}{2\pi}\frac{\sin((n+\frac{1}{2})x)}{\sin(x/2)}, \quad x \in [-\pi,\pi] \setminus \{0\}, n \in \mathbb{N}.$$

Hinweis: Aufgabe 9 a) und die Identität $\sin(x) = (e^{ix} - e^{-ix})/(2i)$, $x \in \mathbb{R}$.

d) Sei nun f zusätzlich differenzierbar. Zeigen Sie, dass die Fourierreihe von f punktweise gegen f konvergiert, d.h., $(P_n f)(x) \to f(x)$ $(n \to \infty)$ für alle $x \in [-\pi,\pi]$.

Hinweis: Schreiben Sie mit Hilfe von a),b) und c)

$$|(P_n f)(x) - f(x)| = \left|\int_{-\pi}^{\pi} (\tilde{f}(x-y) - \tilde{f}(x))D_n(y)dy\right| = \left|\int_{-\pi}^{\pi} g(y)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)y\right)dy\right|$$

mit $g(y) := (2\pi)^{-1}(\tilde{f}(x-y) - \tilde{f}(x))/\sin(y/2)$. Zeigen Sie, dass g stetig, also insbesondere integrierbar ist, und nutzen Sie nun Aufgabe 7 b) und die Bemerkung in Aufgabe 7.

Lösungsvorschlag:

Für $k \in \mathbb{Z}$ sei wie immer $e_k \in C_{\text{per}}([-\pi,\pi],\mathbb{C})$ definiert durch $e_k(x) := e^{ikx}$, $x \in [-\pi,\pi]$.

a) Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir berechnen

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(x)\,dx = \sum_{|k|\le n} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e_k(x)\,dx = \sum_{|k|\le n} (e_k|e_0) = 1,$$

da $\{e_k : k \in \mathbb{Z}\}$ ein Orthonormalsystem ist.

b) Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt für alle $x \in [-\pi,\pi]$

$$\begin{aligned}(P_n f)(x) &= \sum_{|k|\le n} \hat{f}(k)e_k(x) = \sum_{|k|\le n} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)e_{-k}(y)e_k(x)dy \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(y)\left(\frac{1}{2\pi}\sum_{|k|\le n} e_k(x-y)\right)dy = \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(x-y)\left(\frac{1}{2\pi}\sum_{|k|\le n} e_k(y)\right)dy \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(x-y)D_n(y)\,dy,\end{aligned}$$

wobei wir im vorletzten Schritt die Substitution $y \mapsto x-y$ verwendet haben.

c) Seien $n \in \mathbb{N}$ und $x \in [-\pi,\pi]\setminus\{0\}$. Nach Aufgabe 9 a) ist

$$\begin{aligned}2\pi D_n(x) &= \sum_{|k|\le n} e^{ikx} = \frac{e^{i(n+1)x} - e^{-inx}}{e^{ix}-1} = \frac{e^{i\frac{x}{2}}\left(e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)x} - e^{-i\left(n+\frac{1}{2}\right)x}\right)}{e^{i\frac{x}{2}}\left(e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}}\right)} \\ &= \frac{\left(e^{i(n+\frac{1}{2})x} - e^{-i(n+\frac{1}{2})x}\right)/(2i)}{\left(e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}}\right)/(2i)} = \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin(x/2)}.\end{aligned}$$

d) Seien $x \in [-\pi,\pi]$ und f zusätzlich differenzierbar. Wir nutzen den Hinweis und erhalten

$$\begin{aligned}|(P_n f)(x) - f(x)| &\overset{\text{b)}}{=} \left|\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(x-y)D_n(y)\,dy - \tilde{f}(x)\right| \overset{\text{a)}}{=} \left|\int_{-\pi}^{\pi} (\tilde{f}(x-y)-\tilde{f}(x))D_n(y)\,dy\right| \\ &\overset{\text{c)}}{=} \left|\int_{-\pi}^{\pi} g(y)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)y\right)\,dy\right|\end{aligned}$$

mit

$$g\colon [-\pi,\pi] \to \mathbb{C},\ g(y) := \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\frac{\tilde{f}(x-y)-\tilde{f}(x)}{\sin(y/2)} & \text{für } y \neq 0, \\ -\frac{1}{\pi}f'(x) & \text{für } y = 0. \end{cases}$$

Dann ist g stetig: Für $y \neq 0$ ist dies klar, da Summen und Produkte stetiger Funktionen stetig sind. Für $y = 0$ folgt mit der Regel von de L'Hopital

$$\lim_{y\to 0} g(y) = \frac{1}{2\pi}\lim_{y\to 0}\frac{\tilde{f}(x-y)-\tilde{f}(x)}{\sin(y/2)} = \frac{1}{2\pi}\lim_{y\to 0}\underbrace{\frac{\tilde{f}(x-y)-\tilde{f}(x)}{y}}_{\to -f'(x)}\cdot\underbrace{\frac{y}{\sin(y/2)}}_{\to 2} = -\frac{1}{\pi}f'(x).$$

Also ist g in $y=0$ stetig und damit insbesondere integrierbar. Mit Aufgabe 7 b) mit $a := \frac{1}{2}$ und der Bemerkung in Aufgabe 7 folgt nun

$$|(P_n f)(x) - f(x)| = \left|\int_{-\pi}^{\pi} g(y)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)y\right)\right|\,dy \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty).$$