

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

3. Übungsblatt

Aufgabe 13 (Übung)

Sei $V = C([-1, 1])$ mit der Norm

$$\|f\|_2 := \left(\int_{-1}^1 |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \quad f \in V,$$

versehen. Wir definieren $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq V$ durch

$$f_n: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in [-1, -\frac{1}{n}], \\ nx + 1 & \text{für } x \in (-\frac{1}{n}, 0], \\ 1 & \text{für } x \in (0, 1]. \end{cases}$$

- a) Zeigen Sie, dass (f_n) eine Cauchyfolge in $(V, \|\cdot\|_2)$ ist.
- b) Zeigen Sie, dass $(V, \|\cdot\|_2)$ kein Banachraum ist.

Aufgabe 14 (Tutorium)

- a) Sei $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $\det(A)$, indem Sie

- (i) die Regel von Sarrus anwenden,
- (ii) nach der ersten Zeile entwickeln,
- (iii) die Matrix A durch elementare Spaltenumformungen in eine obere Dreiecksmatrix überführen.

- b) Seien $a, b \in \mathbb{R}^3$. Zeigen Sie

$$\det(a, b, a \times b) = \|a \times b\|^2.$$

Aufgabe 15 (Übung)

In dieser Aufgabe geht es um den Determinantenmultiplikationssatz, Satz 17.5 (1), und einigen Folgerungen von ihm.

Seien $n \in \mathbb{N}$ und $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$.

a) Zeigen Sie

$$\det(AB) = \det(A) \det(B).$$

Hinweis: Unterscheiden Sie die Fälle $\det(A) = 0$ und $\det(A) \neq 0$. Für $\det(A) \neq 0$ betrachten Sie (für festes A) die Funktion

$$f_A: \mathbb{K}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{K}, f_A(C) = \frac{1}{\det(A)} \det(AC)$$

und nutzen Sie Satz 17.1 (mit der Identifikation $\mathbb{K}^{n \times n} \cong (\mathbb{K}^n)^n$).

b) Folgern Sie aus a)

$$A \text{ ist invertierbar.} \implies \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

Seien nun $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{K}^{m \times m}$, $n, m \in \mathbb{N}$.

c) Wir betrachten die Matrix

$$C = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{(m+n) \times (m+n)},$$

wobei die 0 in der ersten (bzw. zweiten Zeile) als Nullmatrix in $\mathbb{K}^{n \times m}$ (bzw. in $\mathbb{K}^{m \times n}$) zu verstehen ist. Zeigen Sie

$$\det(C) = \det(A) \det(B).$$

Hinweis: Schreiben Sie $C = \tilde{A} \tilde{B}$ für zwei geeignete Matrizen $\tilde{A}, \tilde{B} \in \mathbb{K}^{(m+n) \times (m+n)}$ mit $\det(\tilde{A}) = \det(A)$, $\det(\tilde{B}) = \det(B)$, und nutzen Sie a).

Aufgabe 16 (Tutorium)

Berechnen Sie die Determinanten der folgenden reellen Matrizen.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -6 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 23 & 9 & \pi & e^{2020} \\ 38 & 19 & 3 & \cos(42) \\ 72 & 36 & 6 & 4 \\ 24 & 12 & 2 & 1 \end{pmatrix}, D_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & 1 - \alpha \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist D_α invertierbar?

Hinweis: Nutzen Sie Aufgabe 15 c) für B und geschickte Spaltenumformungen für C .

Aufgabe 17 (Übung)

a) Seien $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Wir definieren

$$V(x_0, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}.$$

Zeigen Sie

$$\det V(x_0, \dots, x_n) = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

- b) Seien $n \in \mathbb{N}$ und Wertepaare $(x_i, y_i) \subseteq \mathbb{R}^2$, $i = 0, \dots, n$, gegeben, sodass die Stützstellen x_i paarweise verschieden sind. Folgern Sie aus a), dass es genau eine Polynomfunktion

$$p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$$

mit Koeffizienten $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ gibt, sodass

$$p(x_i) = y_i \quad \text{für alle } i = 0, \dots, n.$$

Bemerkung: Die Polynomfunktion p heißt in der Numerik *Interpolationspolynom* und wird dort benutzt, um eine Funktion f zu nähern, deren Funktionswerte $y_i = f(x_i)$ nur an den Stellen x_i , $i = 0, \dots, n$, bekannt sind.

Aufgabe 18 (Tutorium)

Für $\alpha \in \mathbb{R}$ sei das reelle lineare Gleichungssystem $A_\alpha x_\alpha = b_\alpha$ gegeben durch:

$$\begin{cases} \alpha x_1 & + & x_4 & = & 0 \\ -x_1 + \alpha x_2 & & & = & 0 \\ & - & x_2 + \alpha x_3 - 2x_4 & = & 0 \\ & & - & x_3 + \alpha x_4 & = & 1 - \alpha^2. \end{cases}$$

- a) Stellen Sie die Koeffizientenmatrix A_α auf und berechnen Sie ihre Determinante.
b) Bestimmen Sie für diejenigen $\alpha \in \mathbb{R}$, für die obiges Gleichungssystem eine eindeutige Lösung x_α hat, die Lösung x_α mittels der Cramerschen Regel.