Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

3. Übungsblatt

Aufgabe 13 (Übung)

Sei $V = C([-1,1])$ mit der Norm

$$\|f\|_2 := \left(\int_{-1}^{1} |f(x)|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad f \in V,$$

versehen. Wir definieren $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq V$ durch

$$f_n\colon [-1,1] \to \mathbb{R},\ f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in [-1,-\frac{1}{n}], \\ nx+1 & \text{für } x \in (-\frac{1}{n},0], \\ 1 & \text{für } x \in (0,1]. \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass (f_n) eine Cauchyfolge in $(V, \|\cdot\|_2)$ ist.

b) Zeigen Sie, dass $(V, \|\cdot\|_2)$ kein Banachraum ist.

Lösungsvorschlag:

a) Sei $\varepsilon > 0$. Wir müssen zeigen, dass ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, sodass

$$\|f_n - f_m\|_2 < \varepsilon \quad \text{für alle } n,m \geq n_0.$$

Hierfür bemerken wir vorerst, dass die Folge $(\frac{1}{\sqrt{n}})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist und damit ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, sodass

$$\frac{1}{\sqrt{n_0}} < \varepsilon. \tag{$*$}$$

Seien nun $m,n \in \mathbb{N}$ mit $m,n \geq n_0$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass $n \leq m$ gilt. Nach Definition stimmen f_n und f_m auf dem Intervall $[-1,1] \setminus (-\frac{1}{n},0]$ überein, also gilt $|f_n(x) - f_m(x)| = 0$ für alle $x \in [-1,1] \setminus (-\frac{1}{n},0]$. Für $x \in (-\frac{1}{n},0]$ gilt $0 \leq f_n(x) \leq 1$ und $0 \leq f_m(x) \leq 1$, und damit auch $|f_n(x) - f_m(x)| \leq 1$. Somit folgt nun

$$\|f_n(x) - f_m\|_2 = \left(\int_{-1}^{1} |f_n(x) - f_m(x)|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\int_{-\frac{1}{n}}^{0} |f_n(x) - f_m(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_{-\frac{1}{n}}^{0} 1 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n_0}} \overset{(*)}{<} \varepsilon.$$

Da $m, n \geq n_0$ beliebig gewählt waren, erhalten wir

$$\|f_n - f_m\|_2 < \varepsilon \quad \text{für alle } n, m \geq n_0.$$

Also ist (f_n) eine Cauchyfolge in $(V, \|\cdot\|_2)$.

b) Wir beweisen die Aussage per Widerspruch. Angenommen, $(V, \|\cdot\|_2)$ wäre ein Banachraum. Da wir in a) nachgewiesen haben, dass die Folge (f_n) eine Cauchyfolge in $(V, \|\cdot\|_2)$ ist, müsste diese Folge auch einen Grenzwert in $(V, \|\cdot\|_2)$ haben, d.h., es müsste ein $f \in V$ existieren, sodass

$$\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_2 = 0.$$

Wir zeigen nun, dass dann f gegeben ist durch

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [-1, 0), \\ 1 & x \in [0, 1]. \end{cases} \tag{$**$}$$

Offensichtlich wäre dann f unstetig an der Stelle $x = 0$, im Widerspruch zu $f \in V$.
Bevor wir allerdings $(**)$ zeigen, führen wir noch etwas Notation ein. Sei $I = [\alpha, \beta] \subseteq [-1, 1]$, $(\alpha < \beta)$, ein abgeschlossenes Intervall. Dann schreiben wir $V_I := C(I) = \{g\colon I \to \mathbb{R} |\ g \text{ ist stetig}\}$ und $\|g\|_{2,I} := \int_I |g(x)|^2 \, dx := \int_\alpha^\beta |g(x)|^2 \, dx$, $g \in V_I$. Nach §15 des Skriptes, S.1, ist dann der Raum $(V_I, \|\cdot\|_{2,I})$ ein Skalarproduktraum, also insbesondere ein normierter Raum. Ist weiterhin $g \in V$, so liegt die Einschränkung $g|_I$ von g auf I, also

$$g|_I\colon I \to \mathbb{R},\ g|_I(x) = g(x),$$

in V_I und es gilt $\|g|_I\|_{2,I} \leq \|g\|_2$.
Sei nun $I_\varepsilon = [-1, -\varepsilon] \subseteq [-1, 0)$ mit beliebig, aber fest gewähltem $\varepsilon \in (0, 1)$. Dann ist nach Definition $f_n|_I = 0$ für alle $n \geq \varepsilon^{-1}$. Daraus folgt

$$\|f|_{I_\varepsilon}\|_{2,I_\varepsilon} = \lim_{n\to\infty} \|(f - f_n)|_{I_\varepsilon}\|_{2,I_\varepsilon} \leq \lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_2 = 0,$$

also $f|_{I_\varepsilon} = 0$, oder äquivalent, $f(x) = 0$ für alle $x \in I_\varepsilon$. Da $\varepsilon \in (0, 1)$ beliebig gewählt war, muss sogar $f(x) = 0$ für alle $x \in \bigcup_{\varepsilon \in (0,1)} I_\varepsilon = [-1, 0)$ gelten. Betrachten wir nun andererseits das Intervall $I = [0, 1]$, so ist $f_n|_I = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (wobei hier $1 \in V_I$ als konstante Funktion in $[0, 1]$ zu verstehen ist). Damit gilt

$$\|f|_I - 1\|_{2,I} = \|(f - f_n)|_I\|_{2,I} \leq \|f - f_n\|_2 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N},$$

und somit auch

$$0 \leq \|f|_I - 1\|_{2,I} \leq \lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_2 = 0.$$

Folglich muss $\|f|_I - 1\|_{I,2} = 0$ und damit $f|_I = 1$ sein. Das bedeutet aber gerade $f(x) = 1$ für alle $x \in [0, 1]$. Damit ist $(**)$ gezeigt und der Beweis ist abgeschlossen.

Aufgabe 14 (Tutorium)

a) Sei $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $\det(A)$, indem Sie

(i) die Regel von Sarrus anwenden,
(ii) nach der ersten Zeile entwickeln,
(iii) die Matrix A durch elementare Spaltenumformungen in eine obere Dreiecksmatrix überführen.

b) Seien $a, b \in \mathbb{R}^3$. Zeigen Sie

$$\det(a, b, a \times b) = \|a \times b\|^2.$$

Lösungsvorschlag:

a) Sei $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ so wie in der Aufgabenstellung.

(i) Nach der Regel von Sarrus (vgl. S.34, Skript) ist

$$\begin{aligned}\det(A) =& 1\cdot 3\cdot 1 + 2\cdot 1\cdot 1 + 3\cdot(-2)\cdot 2 - 3\cdot 3\cdot 1 - 1\cdot 2\cdot 1 - 2\cdot(-2)\cdot 1 \\ =& 3 + 2 - 12 - 9 - 2 + 4 = -14.\end{aligned}$$

(ii) Nach dem Entwicklungssatz 17.4 erhalten wir

$$\begin{aligned}\det(A) &= \sum_{k=1}^{3} (-1)^{k+1} a_{1k} \det(A_{1k}) \\ &= \det\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - 2\det\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + 3\det\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= (3-2) - 2\cdot(-2-1) + 3\cdot(-4-3) = 1 + 6 - 21 = -14.\end{aligned}$$

(iii) Wir führen elementare Spaltenumformungen durch, die die Determinante invariant lassen (vgl. Satz 17.2 (2)), und erhalten

$$\det(A) = \det \begin{array}{c} \begin{matrix} \overset{+}{\downarrow} & & \cdot(-1) \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{array} = \det \begin{array}{c} \begin{matrix} \overset{+}{\downarrow} & \cdot(-2) & \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ -3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{array} = \det \begin{array}{c} \begin{matrix} \overset{+}{\downarrow} & \cdot 3 & \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} -2 & -4 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} = \det \begin{pmatrix} -14 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nach S.34, Skript, ist die Determinante einer oberen Dreiecksmatrix das Produkt der Diagonalelemente. Deshalb ist

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} -14 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (-14) \cdot 1 \cdot 1 = -14.$$

b) Seien $a = (a_1, a_2, a_3), b = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$ und $a \times b = ((a \times b)_1, (a \times b)_2, (a \times b)_3) \in \mathbb{R}^3$ das Vektorprodukt von a und b. Weiter sei $\{e_1, e_2, e_3\} \subseteq \mathbb{R}^3$ die kanonische Basis im $\mathbb{R}^3$. Dann gilt nach Eigenschaft (D2) der Determinante und dem Entwicklungssatz

$$\begin{aligned} \det((a, b, a \times b)) &= \det([a, b, (a \times b)_1 e_1 + (a \times b)_2 e_2 + (a \times b)_3 e_3]) \\ &= \det((a, b, (a \times b)_1 e_1)) + \det((a, b, (a \times b)_2 e_2)) + \det((a, b, (a \times b)_3 e_3)) \\ &= (a \times b)_1 \det \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix} - (a \times b)_2 \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix} + (a \times b)_3 \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \\ &= (a \times b)_1^2 + (a \times b)_2^2 + (a \times b)_3^2 \\ &= \|a \times b\|^2. \end{aligned}$$

Aufgabe 15 (Übung)

In dieser Aufgabe geht es um den Determinantenmultiplikationssatz, Satz 17.5 (1), und einigen Folgerungen von ihm.
Seien $n \in \mathbb{N}$ und $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$.

a) Zeigen Sie

$$\det(AB) = \det(A) \det(B).$$

Hinweis: Unterscheiden Sie die Fälle $\det(A) = 0$ und $\det(A) \neq 0$. Für $\det(A) \neq 0$ betrachten Sie (für festes A) die Funktion

$$f_A \colon \mathbb{K}^{n \times n} \to \mathbb{K}, \ f_A(C) = \frac{1}{\det(A)} \det(AC)$$

und nutzen Sie Satz 17.1 (mit der Identifikation $\mathbb{K}^{n \times n} \cong (\mathbb{K}^n)^n$).

b) Folgern Sie aus a)

$$A \text{ ist invertierbar.} \implies \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

Seien nun $A \in \mathbb{K}^{n \times n}, B = \mathbb{K}^{m \times m}$, $n, m \in \mathbb{N}$.

c) Wir betrachten die Matrix

$$C = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{(m+n) \times (m+n)},$$

wobei die 0 in der ersten (bzw. zweiten Zeile) als Nullmatrix in $\mathbb{K}^{n \times m}$ (bzw. in $\mathbb{K}^{m \times n}$) zu verstehen ist. Zeigen Sie

$$\det(C) = \det(A) \det(B).$$

Hinweis: Schreiben Sie $C = \tilde{A}\tilde{B}$ für zwei geeignete Matrizen $\tilde{A}, \tilde{B} \in \mathbb{K}^{(m+n)\times(m+n)}$ mit $\det(\tilde{A}) = \det(A)$, $\det(\tilde{B}) = \det(B)$, und nutzen Sie a).

Lösungsvorschlag:

Seien $n \in \mathbb{N}$ und $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$.

a) Sei zunächst $\det(A) = 0$. Nach Satz 17.2 (4) ist dann A nicht invertierbar. Allerdings ist nach dem Rangsatz eine Matrix genau dann invertierbar, wenn sie vollen Rang hat. Für den Rang von A folgt deshalb $\operatorname{rg}(A) := \dim(\operatorname{Bild}(A)) < n$ und wegen

$$\operatorname{Bild}(AB) \subseteq \operatorname{Bild}(A),$$

dann auch $\operatorname{rg}(AB) \leq \operatorname{rg}(A) < n$. Also hat auch AB keinen vollen Rang und ist damit nicht invertierbar, was gemäß Satz 17.2 (4) wiederum $\det(AB) = 0$ impliziert. Also gilt $\det(AB) = \det(A)\det(B)$, falls $\det(A) = 0$ ist.

Sei also nun $\det(A) \neq 0$. Wir betrachten dann die Abbildung

$$f_A \colon \mathbb{K}^{n\times n} \to \mathbb{K},\ f_A(C) = \frac{1}{\det(A)}\det(AC).$$

Man kann schnell nachrechnen, dass f_A die Eigenschaften (D1), (D2) und (D3) aus Satz 17.1 erfüllt (also eine sogenannte *normierte, alternierende Multilinearform* ist). In der Tat gilt für die Einheitsmatrix $I_n \in \mathbb{K}^{n\times n}$

$$f_A(I_n) = \frac{1}{\det(A)}\det(AI_n) = \frac{1}{\det(A)}\det(A) = 1.$$

Also gilt (D1). Für den Nachweis von (D2) seien $C = (c_1, ..., c_n) \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mit Spalten $c_1, ..., c_n \in \mathbb{K}^n$ sowie $b \in \mathbb{K}^n$ und Skalare $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ gegeben. Dann gilt für alle $j \in \{1, ..., n\}$ (für $j \in \{1, n\}$ mit den offensichtlichen Interpretationen der Matrixausdrücke)

$$\begin{aligned}
&f_A((c_1, \ldots, c_{j-1}, \alpha c_j + \beta b, c_{j+1}, \ldots, c_n)) \\
&= \frac{1}{\det(A)}\det((Ac_1, \ldots, Ac_{j-1}, A(\alpha c_j + \beta b), Ac_{j+1}, \ldots, Ac_n)) \\
&= \frac{1}{\det(A)}\det((Ac_1, \ldots, Ac_{j-1}, \alpha Ac_j + \beta Ab, Ac_{j+1}, \ldots, Ac_n)) \\
&\overset{(*)}{=} \frac{\alpha}{\det(A)}\det((Ac_1, ..., Ac_{j-1}, Ac_j, Ac_{j+1}, ..., Ac_n)) + \frac{\beta}{\det(A)}\det((Ac_1, ..., Ac_{j-1}, Ab, Ac_{j+1}, ..., Ac_n)) \\
&= \alpha f_A((c_1, \ldots, c_{j-1}, c_j, c_{j+1}, \ldots, c_n)) + \beta f_A((c_1, \ldots, c_{j-1}, b, c_{j+1}, \ldots, c_n)),
\end{aligned}$$

wobei wir in $(*)$ Eigenschaft (D2) der Determinante ausgenutzt haben. Also erfüllt f_A auch (D2). Schließlich nehmen wir für den Nachweis von (D3) nun an, dass es $j, k \in \{1, \ldots, n\}$, $j \neq k$, gibt mit $c_j = c_k$. Dann ist auch $Ac_j = Ac_k$ und somit folgt nach Eigenschaft (D3) der Determinante

$$\begin{aligned}
&f_A((c_1, \ldots, c_j, \ldots, c_k, \ldots, c_n)) \\
&= \frac{1}{\det(A)}\det((Ac_1, \ldots, Ac_j, \ldots, Ac_k, \ldots, Ac_n)) = 0.
\end{aligned}$$

Also erfüllt f_A auch (D3). Nach Satz 17.1 ist aber die Determinante die eindeutig bestimmte Funktion, die (D1), (D2) und (D3) erfüllt. Folglich muss $f_A = \det$ gelten, oder äquivalent,

$$\frac{1}{\det(A)} \det(AC) = \det(C) \quad \text{für alle } C \in \mathbb{K}^{n\times n}.$$

Setzen wir $C := B$ und multiplizieren wir obige Gleichung mit $\det(A)$, erhalten wir die gewünschte Identität

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

b) Sei A nun invertierbar. Nach Satz 17.4 (2) ist also $\det(A) \neq 0$. Aus Aufgabenteil a) folgt nun

$$1 \overset{\text{(D3)}}{=} \det(I_n) = \det(A^{-1} \cdot A) \overset{\text{a)}}{=} \det(A^{-1})\det(A).$$

Division durch $\det(A)$ impliziert

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

c) Seien $A \in \mathbb{K}^{n\times n}, B \in \mathbb{K}^{m\times m}$, $n, m \in \mathbb{N}$. Sei ferner $C \in \mathbb{K}^{(m+n)\times(m+n)}$ wie in der Aufgabenstellung. Wir definieren

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_m \end{pmatrix}, \widetilde{B} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{(m+n)\times(m+n)}.$$

Durch sukzessive Entwicklung nach der $n+m$-ten, $n+m-1$-ten, $\ldots, n+1$-ten Zeile erhalten wir

$$\det(\widetilde{A}) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_{m-1} \end{pmatrix} = \cdots = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \det(A).$$

Analog erhalten wir durch sukzessive Entwicklung nach der ersten, zweiten, $\ldots, n$-ten Zeile erhalten wir

$$\det(\widetilde{B}) = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \cdots = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det(B).$$

Ferner rechnet man leicht nach, dass

$$C = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \widetilde{A}\widetilde{B},$$

sodass wir mit Aufgabenteil a)

$$\det(C) = \det(\widetilde{A})\det(\widetilde{B}) = \det(A)\det(B)$$

folgern.

Bemerkung: Die Identität $\det(C) = \det(A)\det(B)$ gilt auch dann, wenn

$$C = \begin{pmatrix} A & D \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

mit einer beliebigen Matrix $D \in \mathbb{K}^{n\times m}$ ist. Dies kann man so ähnlich zeigen wie die Aussage in a).

Aufgabe 16 (Tutorium)

Berechnen Sie die Determinanten der folgenden reellen Matrizen.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -6 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 23 & 9 & \pi & e^{2020} \\ 38 & 19 & 3 & \cos(42) \\ 72 & 36 & 6 & 4 \\ 24 & 12 & 2 & 1 \end{pmatrix}, D_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist D_α invertierbar?
Hinweis: Nutzen Sie Aufgabe 15 c) für B und geschickte Spaltenumformungen für C.

Lösungsvorschlag:

Wir entwickeln A nach der ersten Zeile und die dadurch entstehende Matrix dann nochmal nach der ersten Zeile.

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -6 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & -1 & 4 \end{pmatrix} = 2 \det \underbrace{\begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ -6 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}}_{=:A'} - \det \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 0 & -6 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}}_{=:A''}.$$

Entwickeln wir $\det(A')$ nach der ersten Zeile und $\det(A'')$ nach der ersten Spalte, erhalten wir

$$\begin{aligned} \det(A) = 2 \det \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ -6 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 0 & -6 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} &= 2 \cdot (-4) \det \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} - 2 \det \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \\ &= (-8) \cdot [2 \cdot 4 - 4 \cdot (-1)] - 2 \cdot \underbrace{[(-6) \cdot (-1) - 2 \cdot 3]}_{=0} \\ &= (-8) \cdot 12 = -96. \end{aligned}$$

Die Matrix B hat Blockdiagonalgestalt, also ist nach Aufgabe 15 c)

$$\begin{aligned} \det(B) &= \det \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 8 \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \\ &= [1 \cdot 2 \cdot 8 + 5 \cdot (-1) \cdot 3 + 3 \cdot 2 \cdot (-3) - 3 \cdot 2 \cdot 3 - (-1) \cdot (-3) \cdot 1 - 5 \cdot 2 \cdot 8] \cdot (1 \cdot 4 - 2 \cdot 3) \\ &= [16 - 15 - 18 - 18 - 3 - 80] \cdot (-2) \\ &= (-118) \cdot (-2) = 236. \end{aligned}$$

Wir bringen C durch elementare Spaltenumformungen, die die Determinante invariant lassen, in obere Dreiecksgestalt.

$$\det(C) = \det\begin{pmatrix} 23 & 9 & \pi & e^{2020} \\ 38 & 19 & 3 & \cos(42) \\ 72 & 36 & 7 & 4 \\ 24 & 12 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 5 & 9 & \pi & e^{2020} \\ 0 & 19 & 3 & \cos(42) \\ 0 & 36 & 6 & 4 \\ 0 & 12 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 5 & 9-6\pi & \pi & e^{2020} \\ 0 & 1 & 3 & \cos(42) \\ 0 & 0 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} 5 & 9-6\pi & \pi - 2e^{2020} & e^{2020} \\ 0 & 1 & 3 - 2\cos(42) & \cos(42) \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 5 \cdot 1 \cdot (-2) \cdot 1 = -10.$$

Schließlich ist

$$\det(D_\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} = \alpha^2 - (1-\alpha) = \alpha^2 + \alpha - 1.$$

Nach Satz 17.2 (4) ist D_α genau dann invertierbar, falls $\det(D_\alpha) \neq 0$ ist. Nach der pq-Formel ist aber $\det(D_\alpha) = \alpha^2 + \alpha - 1 = 0$ genau dann, wenn $\alpha \in \{\alpha_0, \alpha_1\}$, wobei

$$\alpha_0 = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \quad \alpha_1 = -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = -\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Damit ist D_α genau dann invertierbar, falls $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{\alpha_0, \alpha_1\}$.

Aufgabe 17 (Übung)

a) Seien $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Wir definieren

$$V(x_0, \dots, x_n) := \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}.$$

Zeigen Sie

$$\det V(x_0, \dots, x_n) = \prod_{0 \le i < j \le n} (x_j - x_i).$$

b) Seien $n \in \mathbb{N}$ und Wertepaare $(x_i, y_i) \subseteq \mathbb{R}^2$, $i = 0, \dots, n$, gegeben, sodass die Stützstellen x_i paarweise verschieden sind. Folgern Sie aus a), dass es genau eine Polynomfunktion

$$p \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

mit Koeffizienten $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ gibt, sodass

$$p(x_i) = y_i \qquad \text{für alle } i = 0, \dots, n.$$

Bemerkung: Die Polynomfunktion p heißt in der Numerik *Interpolationspolynom* und wird dort benutzt, um eine Funktion f zu nähern, deren Funktionswerte $y_i = f(x_i)$ nur an den Stellen x_i, $i = 0, \ldots, n$, bekannt sind.

Lösungsvorschlag:

a) Wir beweisen die Aussage durch Induktion über $n \in \mathbb{N}$. Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichnen wir mit $A(n)$ die Aussage

$A(n)$: Für beliebige reelle Zahlen $x_0, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ gilt $\det V(x_0, \ldots, x_n) = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$.

Induktionsbeginn: $n = 1$
Seien $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$. Nach 17.4, Skript, gilt dann

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \end{pmatrix} = 1 \cdot x_1 - x_0 \cdot 1 = x_1 - x_0.$$

Somit ist $A(1)$ wahr.
Induktionsschritt: $n \to n+1$
Induktionsannahme (IA): Die Aussage $A(n)$ sei für ein $n \in \mathbb{N}$ wahr.
Wir müssen nun zeigen, dass $A(n+1)$ wahr ist. Seien hierfür $x_0, x_1, \ldots, x_{n+1} \in \mathbb{R}$ gegeben. Ziehen wir für $j = 0, \ldots, n$ sukzessiv das x_0-fache der $n+1-j$-ten Spalte von der $n+2-j$-ten Spalte ab, erhalten wir

$$\det V(x_0, \ldots x_{n+1}) = \det \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^{n-1} & x_0^n & x_0^{n+1} \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} & x_1^n & x_1^{n+1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} & x_2^n & x_2^{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \cdots & x_{n+1}^{n-1} & x_2^n & x_{n+1}^{n+1} \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^{n-1} & x_0^n & 0 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} & x_1^n & (x_1 - x_0)x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} & x_2^n & (x_2 - x_0)x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \cdots & x_{n+1}^{n-1} & x_2^n & (x_{n+1} - x_0)x_{n+1}^n \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^{n-1} & 0 & 0 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} & (x_1 - x_0)x_1^{n-1} & (x_1 - x_0)x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} & (x_2 - x_0)x_2^{n-1} & (x_2 - x_0)x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \cdots & x_{n+1}^{n-1} & (x_{n+1} - x_0)x_{n+1}^{n-1} & (x_{n+1} - x_0)x_{n+1}^n \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x_1 - x_0 & (x_1 - x_0)x_1 & (x_1 - x_0)x_1^2 & \cdots & (x_1 - x_0)x_1^n \\ 1 & x_2 - x_0 & (x_2 - x_0)x_2 & (x_2 - x_0)x_2^2 & \cdots & (x_2 - x_0)x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n+1} - x_0 & (x_{n+1} - x_0)x_{n+1} & (x_{n+1} - x_0)x_{n+1}^2 & \cdots & (x_{n+1} - x_0)x_{n+1}^n \end{pmatrix}.$$

Entwickeln wir nun die Determinante der obigen Matrix nach der ersten Zeile und nutzen wir die Linearität der Determinante in den Zeilen einer Matrix sowie die Induktionsannahme (IA) aus, erhalten wir weiter

$$\begin{aligned}
\det V(x_0, ..., x_{n+1}) &= \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x_1 - x_0 & (x_1 - x_0)x_1 & (x_1 - x_0)x_1^2 & \cdots & (x_1 - x_0)x_1^n \\ 1 & x_2 - x_0 & (x_2 - x_0)x_2 & (x_2 - x_0)x_2^2 & \cdots & (x_2 - x_0)x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n+1} - x_0 & (x_{n+1} - x_0)x_{n+1} & (x_{n+1} - x_0)x_{n+1}^2 & \cdots & (x_{n+1} - x_0)x_{n+1}^n \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} x_1 - x_0 & (x_1 - x_0)x_1 & (x_1 - x_0)x_1^2 & \cdots & (x_1 - x_0)x_1^n \\ x_2 - x_0 & (x_2 - x_0)x_2 & (x_2 - x_0)x_2^2 & \cdots & (x_2 - x_0)x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n+1} - x_0 & (x_{n+1} - x_0)x_{n+1} & (x_{n+1} - x_0)x_{n+1}^2 & \cdots & (x_{n+1} - x_0)x_{n+1}^n \end{pmatrix} \\
&= \prod_{j=1}^{n+1} (x_j - x_0) \det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & \cdots & x_2^n \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 & \cdots & x_3^{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & x_{n+1}^3 & \cdots & x_{n+1}^n \end{pmatrix} \\
&= \prod_{j=1}^{n+1} (x_j - x_0) \cdot \det V(x_1, \ldots, x_{n+1}) \\
&\overset{\text{(IA)}}{=} \prod_{j=1}^{n+1} (x_j - x_0) \cdot \prod_{1 \le i < j < n+1} (x_j - x_i) = \prod_{0 \le i < j \le n+1} (x_j - x_i).
\end{aligned}$$

Damit ist $A(n+1)$ wahr. Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion ist $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ wahr. Somit ist der Beweis von a) abgeschlossen.

b) Seien Wertepaare $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$, $i = 0, \ldots, n$, gegeben, sodass die x_i paarweise verschieden sind. Sei ferner $p \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ eine Polynomfunktion mit noch zu bestimmenden Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Die Bedingung $y_i = p(x_i)$, $i = 0, \ldots, n$, ist äquivalent zu den $(n+1)$ linearen Gleichungen

$$(*) \begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \ldots + a_n x_0^n = y_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \ldots + a_n x_1^n = y_1 \\ a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + \ldots + a_n x_2^n = y_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \ldots + a_n x_n^n = y_n \end{cases}$$

in den Unbekannten $a_0, \dots, a_n$. In Matrixschreibweise ist das lineare Gleichungssystem $(*)$ durch $Aa = y$ beschrieben, wobei

$$A = V(x_0, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix}, a = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Nach Voraussetzung sind aber die x_i paarweise verschieden, sodass nach Aufgabenteil a)

$$\det A = \det V(x_0, \dots, x_n) \overset{a)}{=} \prod_{0 \leq i < j \leq n} \underbrace{(x_j - x_i)}_{\neq 0} \neq 0.$$

Nach Satz 17.2 (4) ist damit A invertierbar. Damit existiert eine eindeutige Lösung $a = (a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ der Gleichung $Aa = y$ und damit auch eine eindeutige Polynomfunktion $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ mit $y_i = p(x_i)$ für alle $i = 0, \dots, n$.

Aufgabe 18 (Tutorium)

Für $\alpha \in \mathbb{R}$ sei das reelle lineare Gleichungssystem $A_\alpha x_\alpha = b_\alpha$ gegeben durch:

$$\begin{cases} \alpha x_1 & & & + \; x_4 = & 0 \\ -x_1 + \alpha x_2 & & & = & 0 \\ & - \; x_2 + \alpha x_3 & - \; 2x_4 = & & 0 \\ & & - \; x_3 + \alpha x_4 = & & 1 - \alpha^2. \end{cases}$$

a) Stellen Sie die Koeffizientenmatrix A_α auf und berechnen Sie ihre Determinante.
b) Bestimmen Sie für diejenigen $\alpha \in \mathbb{R}$, für die obiges Gleichungssystem eine eindeutige Lösung x_α hat, die Lösung x_α mittels der Cramerschen Regel.

Lösungsvorschlag:

a) Die Koeffizientenmatrix $A_\alpha \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ ist gegeben durch

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 1 \\ -1 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \alpha & -2 \\ 0 & 0 & -1 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Wir entwickeln die Determinante nach der letzten Spalte und erhalten

$$\begin{aligned} \det(A) &= \sum_{i=1}^4 (-1)^{i+4} a_{i4} \det(A_{i4}) \\ &= -\det \begin{pmatrix} -1 & \alpha & 0 \\ 0 & -1 & \alpha \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + 2\det \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ -1 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \alpha \det \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ -1 & \alpha & 0 \\ 0 & -1 & \alpha \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= - [(-1)\cdot(-1)\cdot(-1)] + 2\cdot[\alpha\cdot\alpha\cdot(-1)] + \alpha\cdot[\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha] \\
&= \alpha^4 - 2\alpha^2 + 1 = (1-\alpha^2)^2,
\end{aligned}
$$

wobei wir in der dritten Gleichung ausgenutzt haben, dass die 3×3-Matrizen obere bzw. untere Dreiecksgestalt haben und ihre Determinanten deshalb gerade durch das Produkt der Diagonaleinträge gegeben ist.

b) Das lineare Gleichungssystem $Ax_\alpha = b_\alpha$ hat genau dann eine eindeutige Lösung, wenn $\det(A_\alpha) \neq 0$ ist. Es gilt aber

$$
\det(A_\alpha) = 0 \overset{\text{a)}}{\iff} (\alpha^2-1)^2 = 0 \iff \alpha \in \{-1, 1\}.
$$

Damit existiert genau dann eine eindeutige Lösung von $A_\alpha x_\alpha = b_\alpha$, falls $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Falls nun $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$, so sind nach der Cramerschen Regel die Komponenten x_1, x_2, x_3, x_4 des Lösungsvektors $x_\alpha \in \mathbb{R}^4$ gegeben durch

$$
x_1 = \frac{\det((b_\alpha, a_2, a_3, a_4))}{\det(A_\alpha)}, x_2 = \frac{\det((a_1, b_\alpha, a_3, a_4))}{\det(A_\alpha)}, x_3 = \frac{\det((a_1, a_2, b_\alpha, a_4))}{\det(A_\alpha)}, x_4 = \frac{\det((a_1, a_2, a_3, b_\alpha))}{\det(A_\alpha)},
$$

wobei die a_j, $j = 1, \dots, 4$, die Spalten von A_α bezeichnen. Wir müssen also noch die im Zähler auftauchenden Determinanten bestimmen:

$$
\begin{aligned}
\det((b_\alpha, a_2, a_3, a_4)) &= \det\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \alpha & -2 \\ 1-\alpha^2 & 0 & -1 & \alpha \end{pmatrix} \\
&= -(1-\alpha^2)\det\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \alpha & 0 & 0 \\ -1 & \alpha & -2 \end{pmatrix} = -(1-\alpha^2)\det\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ -1 & \alpha \end{pmatrix} = -(1-\alpha^2)\cdot\alpha^2,
\end{aligned}
$$

wobei wir zuerst nach der ersten Spalte und dann nach der ersten Zeile entwickelt haben. Weiter ist

$$
\begin{aligned}
\det((a_1, b_\alpha, a_3, a_4)) &= \det\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & -2 \\ 0 & (1-\alpha^2) & -1 & \alpha \end{pmatrix} \\
&= (1-\alpha^2)\det\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & -2 \end{pmatrix} = -(1-\alpha^2)\cdot\alpha\cdot\det\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -(1-\alpha^2)\cdot\alpha,
\end{aligned}
$$

wobei wir für die ersten beiden Gleichungen zweimal nach der zweiten Spalte entwickelt haben. Weiterhin ist

$$
\det((a_1, a_2, b_\alpha, a_4)) = \det\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 1 \\ -1 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1-\alpha^2 & \alpha \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
&= -\,(1-\alpha^2)\det\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 1 \\ -1 & \alpha & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \\
&=(1-\alpha^2)\left[-\det\begin{pmatrix} -1 & \alpha \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + 2\det\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ -1 & \alpha \end{pmatrix}\right] \\
&=(1-\alpha^2)\cdot(-1+2\alpha^2),
\end{aligned}
$$

wobei wir für die erste und zweite Gleichung jeweils nach der dritten Spalte entwickelt haben. Schließlich ist

$$
\det((a_1,a_2,a_3,b_\alpha)) = \det\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ -1 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-\alpha^2 \end{pmatrix} = (1-\alpha^2)\det\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ -1 & \alpha & 0 \\ 0 & -1 & \alpha \end{pmatrix} = (1-\alpha^2)\cdot\alpha^3,
$$

wobei wir nach der vierten Spalte entwickelt haben und ausgenutzt haben, dass die dadurch entstandene Matrix untere Dreiecksgestalt und ihre Determinante daher das Produkt der Diagonaleinträge ist. Damit sind die Komponenten des Lösungsvektors gegeben durch

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{\det((b_\alpha,a_2,a_3,a_4))}{\det(A_\alpha)} = -\frac{(1-\alpha^2)\cdot\alpha^2}{(1-\alpha^2)^2} = -\frac{\alpha^2}{(1-\alpha^2)}, \\
x_2 &= \frac{\det((a_1,b_\alpha,a_3,a_4))}{\det(A_\alpha)} = -\frac{(1-\alpha^2)\cdot\alpha}{(1-\alpha^2)^2} = -\frac{\alpha}{1-\alpha^2}, \\
x_3 &= \frac{\det((a_1,a_2,b_\alpha,a_4))}{\det(A_\alpha)} = \frac{(1-\alpha^2)\cdot(-1+2\alpha^2)}{(1-\alpha^2)^2} = \frac{\alpha^2}{1-\alpha^2} - 1, \\
x_4 &= \frac{\det((a_1,a_2,a_3,b_\alpha))}{\det(A_\alpha)} = \frac{(1-\alpha^2)\cdot\alpha^3}{(1-\alpha^2)^2} = \frac{\alpha^3}{1-\alpha^2}.
\end{aligned}
$$