

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

4. Übungsblatt

Aufgabe 19 (Übung)

a) Es seien $A, B, C \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Welche der drei Matrizen A, B, C sind zueinander ähnlich? Geben Sie eine invertierbare Matrix S an mit $M_1 = S^{-1}M_2S$ für zwei ähnliche Matrizen $M_1, M_2 \in \{A, B, C\}$.

b) Die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 6 & 6 \\ -12 & 2 & 12 & 12 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \\ -4 & 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & -4 \\ -3 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$$

sind *simultan diagonalisierbar*, d.h., es existiert eine invertierbare Matrix $S \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$, sodass sowohl $S^{-1}AS$ also auch $S^{-1}BS$ Diagonalgestalt haben. Finden Sie solch eine Matrix S .

Aufgabe 20 (Tutorium)

Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch? Begründen Sie Ihre Antwort.

Im Folgenden sei immer $n \in \mathbb{N}$.

- Jede reelle Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ besitzt mindestens einen reellen Eigenwert λ .
- Ist $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert einer reellen Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, so ist auch $\bar{\lambda}$ ein Eigenwert von A .
- Ist $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ unitär und $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A , so ist $|\lambda| = 1$.
- Ist $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ eine doppelte Nullstelle des charakteristischen Polynoms p_A , so gibt es zwei linear unabhängige Eigenvektoren zum Eigenwert λ .
- Sind $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ diagonalisierbar, so ist auch $A + B$ diagonalisierbar.
- Ist $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, so ist $A^T A$ diagonalisierbar.
- Haben $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ die gleichen Eigenwerte, so sind A und B zueinander ähnlich.
- Jede normale Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ist unitär diagonalisierbar.

Aufgabe 21 (Übung)

Seien $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ hermitesch. Nach dem Spektralsatz für hermitesche Matrizen, Satz 18.8 (2), (4), hat A reelle Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ und es existiert eine unitäre Matrix $S \in \mathbb{C}^{n \times n}$, sodass $A = SDS^*$ ist, wobei $D := \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ ist. Im Folgenden sei $\sigma(A) := \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ und $F := \{f: \sigma(A) \rightarrow \mathbb{C}\}$. Der Spektralsatz für hermitesche Matrizen ermöglicht es uns nun, auf elegante Weise einen sogenannten *Funktionalkalkül*, d.h., $f(A)$ für $f \in F$, zu definieren. Dazu betrachten wir die Abbildung

$$\Phi_A: F \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n}, \quad \Phi_A(f) := Sf(D)S^*,$$

wobei $f(D) := \text{diag}(f(\lambda_1), \dots, f(\lambda_n))$.

Wir schreiben im Folgenden $f(A) := \Phi_A(f)$ für $f \in F$. Zeigen Sie:

- a) $\text{id}(A) = A$, wobei $\text{id} \in F$ durch $\text{id}(\lambda) := \lambda$, $\lambda \in \sigma(A)$, definiert ist.
- b) $(\alpha f + g)(A) = \alpha f(A) + g(A)$ und $(f \cdot g)(A) = f(A)g(A)$ für alle $f, g \in F$.
- c) $\overline{f}(A) = (f(A))^*$ für alle $f \in F$.
- d) Für $z \in \mathbb{C}$ sei nun $e^{zA} := f_z(A)$, wobei $f_z \in F$ durch $f_z(\lambda) := e^{z\lambda}$, $\lambda \in \sigma(A)$, definiert ist.

Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

- (i) $e^{0A} = I$.
- (ii) $e^{(z+w)A} = e^{zA}e^{wA}$ für alle $z, w \in \mathbb{C}$.
- (iii) e^{itA} ist unitär für alle $t \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 22 (Tutorium)

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}.$$

- a) Machen Sie sich klar, dass A diagonalisierbar ist. Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix $S \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, sodass $S^T A S$ diagonal ist.
- b) Berechnen Sie A^k für alle $k \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 23 (Übung)

In dieser Aufgabe sehen wir, dass unendlich viele Eigenwerte existieren können, falls wir lineare Abbildungen in unendlichdimensionalen Vektorräumen betrachten. Wir definieren

$$\Phi: C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \quad \Phi(f) = f''.$$

Bestimmen Sie alle Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume.

Hinweis: Benutzen Sie Satz 12.4, HM I.

Aufgabe 24 (Tutorium)

Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 7 \\ 6 & 2 & -6 \\ -4 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -6 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie für A und B jeweils die Eigenwerte und die dazugehörigen Eigenräume. Ermitteln Sie, falls möglich, invertierbare Matrizen $S_A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ bzw. $S_B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, sodass $S_A^{-1}AS_A$ bzw. $S_B^{-1}BS_B$ Diagonalgestalt hat.