Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
M.Sc. Yonas Mesfun

SS 2020
14.05.2020

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

4. Übungsblatt

Aufgabe 19 (Übung)

a) Es seien $A, B, C \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Welche der drei Matrizen A, B, C sind zueinander ähnlich? Geben Sie eine invertierbare Matrix S an mit $M_1 = S^{-1}M_2S$ für zwei ähnliche Matrizen $M_1, M_2 \in \{A, B, C\}$.

b) Die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 6 & 6 \\ -12 & 2 & 12 & 12 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \\ -4 & 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & -4 \\ -3 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

sind *simultan diagonalisierbar*, d.h., es existiert eine invertierbare Matrix $S \in \mathbb{R}^{4\times 4}$, sodass sowohl $S^{-1}AS$ also auch $S^{-1}BS$ Diagonalgestalt haben. Finden Sie solch eine Matrix S.

Lösungsvorschlag:

a) Wir bestimmen zunächst die charakteristischen Polynome von A, B und C. Für $\lambda \in \mathbb{C}$ erhalten wir

$$p_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 1,$$

$$p_B(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 2 \\ 2 & -3-\lambda \end{pmatrix} = (1+\lambda)(3+\lambda) - 4 = \lambda^2 + 4\lambda - 1,$$

$$p_B(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 3 \\ -1 & -2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)(-2-\lambda) + 3 = \lambda^2 - 4 + 3 = \lambda^2 - 1.$$

Somit stimmen p_A und p_C überein, sodass A und C dieselben Eigenwerte $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$ haben. Ist $n \in \mathbb{N}$ und hat eine Matrix $M \in \mathbb{C}^{n\times n}$ n paarweise verschiedene Eigenwerte, so folgt aus den Sätzen 18.1 und 18.7, dass M diagonalisierbar ist. Dies impliziert (für $n = 2$), dass A und C diagonalisierbar sein müssen. Man rechnet schnell nach, dass

$$\mathrm{Eig}_A(1) = \mathrm{lin}\{v_1\},\ \mathrm{Eig}_A(-1) = \mathrm{lin}\{v_2\} \text{ mit } v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Genauso ist

$$\mathrm{Eig}_C(1) = \mathrm{lin}\{w_1\},\ \mathrm{Eig}_C(-1) = \mathrm{lin}\{w_2\} \text{ mit } w_1 := \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}, w_2 := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Definieren wir $S_A, S_C \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ durch

$$S_A := (v_1, v_2) \text{ und } S_C := (w_1, w_2),$$

so folgt

$$S_A^{-1} A S_A = \mathrm{diag}(1, -1) = S_C^{-1} C S_C,$$

und damit auch

$$S^{-1} A S^{-1} = C,$$

$$\text{wobei} \quad S := S_A S_C^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Damit sind A und C ähnlich. Die Eigenwerte von B (= Nullstellen von p_B) sind $\mu_1 = -2+\sqrt{5}$ und $\mu_2 = -2 - \sqrt{5}$ und somit verschieden von den Eigenwerten von A (bzw. C). Nach Satz 18.4 kann also B nicht zu A (bzw. C) ähnlich sein.

b) Wir bestimmen zunächst die charakteristischen Polynome p_A und p_B. Sei $\lambda \in \mathbb{C}$. Wir entwickeln nach der letzten Zeile und erhalten (nach etwas längerer, mühseliger) Rechnung

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I) \\ &= \left| \begin{pmatrix} -5-\lambda & 1 & 6 & 6 \\ -12 & 2-\lambda & 12 & 12 \\ 1 & 1 & -\lambda & -2 \\ -4 & 0 & 4 & 6-\lambda \end{pmatrix} \right| \end{aligned}$$

$$= 4 \left| \begin{pmatrix} 1 & 6 & 6 \\ 2-\lambda & 12 & 12 \\ 1 & -\lambda & -2 \end{pmatrix} \right| - 4 \left| \begin{pmatrix} -5-\lambda & 1 & 6 \\ -12 & 2-\lambda & 12 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \right| + (6-\lambda) \left| \begin{pmatrix} -5-\lambda & 1 & 6 \\ -12 & -2-\lambda & 12 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \right|$$

$$\begin{aligned} &= 4\left[6\lambda^2 - 12\lambda\right] - 4\left[-2\lambda^2 + 12\lambda - 16\right] + (6-\lambda)\left[-\lambda^3 - 3\lambda^2 + 16\lambda - 12\right] \\ &= \lambda^4 - 3\lambda^3 - 2\lambda^2 + 12\lambda - 8 \\ &= (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2(\lambda + 2). \end{aligned}$$

Somit hat A die Eigenwerte $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = \lambda_4 = 2$. Zur Bestimmung von p_B entwickeln wir nach der zweiten Spalte und erhalten

$$p_B(\lambda) = \det(B - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & -1 & -4 \\ -3 & 1-\lambda & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -1-\lambda & -2 \\ 1 & 0 & -1 & -3-\lambda \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&=(1-\lambda)\det\begin{pmatrix}2-\lambda & -1 & -4\\ 2 & -1-\lambda & -2\\ 1 & -1 & -3-\lambda\end{pmatrix}\\
&=(1-\lambda)\left[(2-\lambda)(1+\lambda)(3+\lambda)+2+8-4(1+\lambda)-2(3+\lambda)-2(2-\lambda)\right]\\
&=(1-\lambda)(\lambda+1)\left[(2-\lambda)(3+\lambda)-4\right]\\
&=(\lambda-1)(\lambda+1)\left[\lambda^2+\lambda-2\right]\\
&=(\lambda-1)^2(\lambda+1)(\lambda+2).
\end{aligned}
$$

Somit hat B die Eigenwerte $\mu_1=-1, \mu_2=-2, \mu_3=\mu_4=1$. Wir bestimmen nun die Eigenräume $\mathrm{Eig}_A(\lambda_i)$ und $\mathrm{Eig}_B(\mu_i)$ für $i=1,2,3,4$. Wir beginnen mit den Räumen $\mathrm{Eig}_A(\lambda_i)$.

- $\mathrm{Eig}_A(1)=\mathrm{Kern}(A-I)$: Da sich die erste und dritte Spalte von

$$
A-I=\begin{pmatrix}-6 & 1 & 6 & 6\\ -12 & 1 & 12 & 12\\ 1 & 1 & -1 & -2\\ -4 & 0 & 4 & 5\end{pmatrix}
$$

  nur um den Faktor (-1) unterscheiden, sehen wir sofort, dass $v_1:=(1,0,1,0)\in\mathrm{Kern}(A-I)$. Da die algebraische Vielfachheit von $\lambda_1=1$ gleich 1 ist, gilt $\dim\mathrm{Eig}_A(1)=\mathrm{Kern}(A-I)=1$. Also muss

$$
\mathrm{Eig}_A(1)=\mathrm{lin}\{v_1\}.
$$

- $\mathrm{Eig}_A(-2)=\mathrm{Kern}(A+2I)$: Wir führen elementare Zeilenumformungen durch und erhalten

$$
A+2I=\begin{pmatrix}-3 & 1 & 6 & 6\\ -12 & 4 & 12 & 12\\ 1 & 1 & 2 & -2\\ -4 & 0 & 4 & 8\end{pmatrix}
\begin{array}{l} \mid\cdot(-4)\\ \\ \mid\cdot 12\\ \mid\cdot(-3)\end{array}
\rightsquigarrow
\begin{pmatrix}-3 & 1 & 6 & 6\\ 0 & 0 & -12 & -12\\ 0 & 16 & 36 & -12\\ 0 & 4 & 0 & -12\end{pmatrix}
\begin{array}{l} \\ \mid :2\\ \\ \mid\cdot(-4)\end{array}
$$

$$
\rightsquigarrow
\begin{pmatrix}-3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -12 & -12\\ 0 & 0 & 36 & 36\\ 0 & 4 & 0 & -12\end{pmatrix}
\begin{array}{l} \\ \\ \mid :36\\ \\ \end{array}
\rightsquigarrow
\begin{pmatrix}-3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0 & -12\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -12 & -12\end{pmatrix}
\begin{array}{l} \\ \mid :4\\ \mid\cdot 12\\ \\ \end{array}
$$

$$
\rightsquigarrow
\begin{pmatrix}-3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -3\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}
$$

  Deshalb folgt für $x=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4$, dass $(A+2I)x=0$ genau dann gilt, wenn

$$
\begin{cases} x_1=\frac{1}{3}x_2\\ x_2=3x_4\\ x_3=-x_4\end{cases}
\iff x\in\mathrm{lin}\{v_2\} \text{ mit } v_2:=\begin{pmatrix}1\\ 3\\ -1\\ 1\end{pmatrix}.
$$

Es folgt

$$\mathrm{Eig}_A(-2) = \mathrm{lin}\{v_2\}.$$

- $\mathrm{Eig}_A(2) = \mathrm{Kern}(A - 2I)$: Da die ersten drei Spalten von

$$A - 2I = \begin{pmatrix} -7 & 1 & 6 & 6 \\ -12 & 0 & 12 & 12 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \\ -4 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

sich zu $0 \in \mathbb{R}^4$ addieren und die letzten beiden Spalten identisch sind, folgt, dass $v_3 := (1, 1, 1, 0), v_4 := (0, 0, -1, 1) \in \mathrm{Kern}(A - 2I)$ gilt. Da v_3 und v_4 linear unabhängig sind, folgt

$$\mathrm{Eig}_A(2) = \mathrm{lin}\{v_3, v_4\}.$$

Zusammenfassend haben wir also

$$\begin{aligned} &\mathrm{Eig}_A(1) = \mathrm{lin}\{v_1\}, \mathrm{Eig}_A(-2) = \mathrm{lin}\{v_2\}, \\ &\mathrm{Eig}_A(2) = \mathrm{lin}\{v_3, v_4\} \end{aligned}$$

mit

$$v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_4 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Zur Bestimmung der Eigenräume $\mathrm{Eig}_B(\mu_i)$ gehe man analog vor. Wir erhalten:

$$\begin{aligned} &\mathrm{Eig}_B(-1) = \mathrm{lin}\{w_1\}, \mathrm{Eig}_B(-2) = \mathrm{lin}\{w_2\}, \\ &\mathrm{Eig}_B(1) = \mathrm{lin}\{w_3, w_4\} \end{aligned}$$

mit

$$w_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, w_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, w_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, w_4 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Würden wir $S_A := (v_1, v_2, v_3, v_4), S_B := (w_1, w_2, w_3, w_4) \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ setzen, so hätten nach S.50, Skript, die Matrizen $S_A^{-1} A S_A$ und $S_B^{-1} B S_B$ jeweils Diagonalgestalt. Wir wollen aber A und B *simultan* diagonalisieren, d.h., wir wollen, dass $S_A = S_B$ ist. Hierzu müssen wir eine Basis $\{s_1, s_2, s_3, s_4\}$ des $\mathbb{R}^4$ finden, sodass die s_i Eigenvektoren von A *und* B sind. Da $v_1 = w_4$ und $v_2 = w_1$ gilt, können wir schon mal $s_1 := v_1$ und $s_2 := v_2$ setzen. Ferner ist $v_3 = w_3 + w_4 \in \mathrm{Eig}_B(1)$ und damit sowohl Eigenvektor von A als auch von B. Wir können also $s_3 := v_3$ setzen. Der Vektor v_4 ist allerdings *kein* Eigenvektor von B. Da aber $w_2 = v_3 + v_4 \in \mathrm{Eig}_A(2)$ und v_3 und v_4 linear unabhängig sind, können wir v_4 durch w_2 ersetzen.

Setzen wir also $s_4 := w_2$, so ist $\{s_1, s_2, s_3, s_4\}$ die gewünschte Basis des $\mathbb{R}^4$. Definieren wir schließlich $S = (s_1, s_2, s_3, s_4) \in \mathbb{R}^{4\times 4}$, so folgt

$$S^{-1}AS = \operatorname{diag}(1, -2, 2, 2) \text{ und } S^{-1}BS = \operatorname{diag}(1, -1, 1, -2).$$

Aufgabe 20 (Tutorium)

Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch? Begründen Sie Ihre Antwort.
Im Folgenden sei immer $n \in \mathbb{N}$.

a) Jede reelle Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ besitzt mindestens einen reellen Eigenwert λ.
b) Ist $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert einer reellen Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, so ist auch $\overline{\lambda}$ ein Eigenwert von A.
c) Ist $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ unitär und $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A, so ist $|\lambda| = 1$.
d) Ist $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ eine doppelte Nullstelle des charakteristischen Polynoms p_A, so gibt es zwei linear unabhängige Eigenvektoren zum Eigenwert λ.
e) Sind $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ diagonalisierbar, so ist auch $A + B$ diagonalisierbar.
f) Ist $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, so ist $A^T A$ diagonalisierbar.
g) Haben $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ die gleichen Eigenwerte, so sind A und B zueinander ähnlich.
h) Jede normale Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ist unitär diagonalisierbar.

Lösungsvorschlag:

a) Die Aussage ist im Allgemeinen falsch. Eine komplexe Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$ ist genau dann ein Eigenwert einer Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, wenn sie eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ ist. Ist nun $A \in \mathbb{R}^{n\times n} \subseteq \mathbb{C}^{n\times n}$, so ist zwar p_A ein Polynom mit reellen Koeffizienten, muss jedoch als solches nicht zwangsläufig reelle Nullstellen haben. Ein Beispiel ist

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

Dann ist

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1 \implies p_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \{-i, i\}.$$

Damit hat A nur nichtreelle Eigenwerte, nämlich $\lambda_1 = i, \lambda_2 = -i$.

b) Dies ist wahr. Da $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist, gilt $A = \overline{A}$ und damit auch $p_A(\overline{\lambda}) = \overline{p_A(\lambda)}$, $\lambda \in \mathbb{C}$. In der Tat,

$$p_A(\overline{\lambda}) = \det(A - \overline{\lambda} I) = \det(\overline{A} - \overline{\lambda} I) = \det\left(\overline{A - \lambda I}\right) = \overline{\det(A - \lambda I)} = \overline{p_A(\lambda)}, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Damit gilt insbesondere für $\lambda \in \mathbb{C}$

$$p_A(\lambda) = 0 \iff \overline{p_A(\lambda)} = 0 \iff p_A(\overline{\lambda}) = 0.$$

Da die Eigenwerte von A genau die Nullstellen von p_A sind, folgt also, dass $\lambda \in \mathbb{C}$ genau dann ein Eigenwert A ist, wenn auch $\overline{\lambda} \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A ist.

c) Die Aussage ist wahr. Nach S.6, Skript, gilt $\|Ax\| = \|x\|$ für alle $x \in \mathbb{C}^n$. Ist nun $x \in \mathbb{C}^n$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$, so folgt

$$\|x\| = \|Ax\| = \|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|.$$

Da x ein Eigenvektor ist, muss $x \neq 0$ sein, sodass wir nach Division der oberen Gleichung durch $\|x\|$ die Gleichung $|\lambda| = 1$ erhalten.

d) Die Aussage ist falsch, da die geometrische Vielfachheit eines Eigenwertes λ (= Anzahl der linear unabhängigen Eigenvektoren zum Eigenwert λ) *echt* kleiner als seine algebraische Vielfachheit (= Vielfachheit von λ als Nullstelle von p_A) sein kann. Ein konkretes Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

Dann ist $p_A(\lambda) = (\lambda - 1)^2$, womit die algebraischen Vielfachheit des Eigenwertes $\lambda = 1$ gleich 2 ist. Der zu $\lambda = 1$ gehörende Eigenraum ist gerade $\mathrm{Eig}_A(1) = \mathrm{Kern}(A - I)$. Nun ist $x = (x_1, x_2) \in \mathrm{Kern}(A - I)$ genau dann, wenn

$$(A - I)x = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x \in \mathrm{lin} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Also ist $\dim \; \mathrm{Eig}_A(\lambda) = 1$ (= geometrische Vielfachheit), und es gibt keine zwei linear unabhängigen Eigenvektoren zum Eigenwert 1.

e) Die Aussage ist im Allgemeinen falsch. Man betrachte

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}.$$

Dann rechnet man leicht nach, dass $p_A(\lambda) = (\lambda - 1)^2 - 1$ und $p_B(\lambda) = (\lambda - 1)^2 + 1$, $\lambda \in \mathbb{C}$, gilt. Damit hat A die Eigenwerte $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$ und B die Eigenwerte $\mu_1 = 1 + i$, $\mu_2 = 1 - i$. Folglich haben A und B jeweils zwei verschiedene Eigenwerte. Da eine $n \times n$-Matrix mit n paarweise verschiedenen Eigenwerten immer diagonalisierbar sein muss (dies folgt aus den Sätzen 18.1 und 18.7), sehen wir, dass A und B diagonalisierbar sind. Die Matrix

$$A + B = 2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ist nicht diagonalisierbar, da anderenfalls auch

$$\frac{1}{2}(A + B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

diagonalisierbar wäre. Dies stünde allerdings im Widerspruch zu unserem Beispiel in Aufgabenteil d).

f) Diese Aussage ist wahr. Da $A^T A$ symmetrisch und damit insbesondere hermitesch ist, folgt die Aussage aus dem Spektralsatz für hermitesche Matrizen (Satz 18.8 (4)).

g) Die Aussage ist im Allgemeinen falsch. Man betrachte beispielsweise

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dann rechnet man schnell nach, dass A und B jeweils die Zahl 1 als einzigen Eigenwert haben. Allerdings ist A diagonal, wohingegen nach Aufgabenteil d) die Matrix B nicht diagonalisierbar ist. Damit können A und B nicht ähnlich sein.

h) Die Aussage ist wahr: Dies ist gerade der Inhalt de Spektralsatzes für normale Matrizen (vgl. Satz 18.9)).

Aufgabe 21 (Übung)

Seien $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ hermitesch. Nach dem Spektralsatz für hermitesche Matrizen, Satz 18.8 (2), (4), hat A reelle Eigenwerte $\lambda_1, ..., \lambda_n$ und es existiert eine unitäre Matrix $S \in \mathbb{C}^{n\times n}$, sodass $A = SDS^*$ ist, wobei $D := \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ ist. Im Folgenden sei $\sigma(A) := \{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$ und $F := \{f : \sigma(A) \to \mathbb{C}\}$. Der Spektralsatz für hermitische Matrizen ermöglicht es uns nun, auf elegante Weise einen sogenannten *Funktionalkalkül*, d.h., $f(A)$ für $f \in F$, zu definieren. Dazu betrachten wir die Abbildung

$$\Phi_A : F \to \mathbb{C}^{n\times n},\ \Phi_A(f) := Sf(D)S^*$$
$$\text{wobei } f(D) := \operatorname{diag}(f(\lambda_1), \dots, f(\lambda_n)).$$

Wir schreiben im Folgenden $f(A) := \Phi_A(f)$ für $f \in F$. Zeigen Sie:

a) $\operatorname{id}(A) = A$, wobei $\operatorname{id} \in F$ durch $\operatorname{id}(\lambda) := \lambda$, $\lambda \in \sigma(A)$, definiert ist.
b) $(\alpha f + g)(A) = \alpha f(A) + g(A)$ und $(f \cdot g)(A) = f(A)g(A)$ für alle $f, g \in F$.
c) $\overline{f}(A) = (f(A))^*$ für alle $f \in F$.
d) Für $z \in \mathbb{C}$ sei nun $e^{zA} := f_z(A)$, wobei $f_z \in F$ durch $f_z(\lambda) := e^{z\lambda}$, $\lambda \in \sigma(A)$, definiert ist. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.
   (i) $e^{0A} = I$.
   (ii) $e^{(z+w)A} = e^{zA}e^{wB}$ für alle $z, w \in \mathbb{C}$.
   (iii) e^{itA} ist unitär für alle $t \in \mathbb{R}$.

Lösungsvorschlag:

a) Nach Definition gilt

$$\operatorname{id}(A) = S\operatorname{id}(D)S^* = SDS^* = A,$$

wobei wir für die erste Gleichung bemerkt haben, dass

$$\operatorname{id}(D) = \operatorname{diag}(\operatorname{id}(\lambda_1), \dots, \operatorname{id}(\lambda_n)) = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = D.$$

b) Seien $f, g \in F$ und $\alpha \in \mathbb{C}$. Dann ist

$$\begin{aligned}(\alpha f + g)(D) &= \operatorname{diag}((\alpha f + g)(\lambda_1), \dots, (\alpha f + g)(\lambda_n))\\ &= \alpha \operatorname{diag}(f(\lambda_1), \dots, f(\lambda_n)) + \operatorname{diag}(g(\lambda_1), \dots, g(\lambda_n))\\ &= \alpha f(D) + g(D)\end{aligned}$$

und damit auch

$$(\alpha f + g)(A) = S\left[(\alpha f + g)(D)\right]S^*$$

$$=S\left[\alpha f(D)+g(D)\right]S^* = \alpha Sf(D)S^* + Sg(D)S^* = \alpha f(A)+g(A).$$

Weiter rechnet man leicht nach, dass $(f\cdot g)(D) = f(D)g(D)$ gilt, sodass wegen $S^*S = I$

$$(f\cdot g)(A) = S\left[(fg)(D)\right]S^* = Sf(D)g(D)S^* = Sf(D)\underbrace{S^*S}_{=I}g(D)S^* = f(A)g(A).$$

c) Sei $f \in F$. Da $f(D)$ Diagonalgestalt hat, gilt $f(D)^* = \overline{f}(D)$. Da für beliebige Matrizen $M, N \in \mathbb{C}^{n\times n}$ die Identitäten $(MN)^* = N^*M^*$, $(M^*)^* = M$ gelten, folgt somit

$$(f(A))^* = (Sf(D)S^*)^* = (S^*)^*(f(D))^*(S)^* = S\overline{f}(D)S^* = \overline{f}(A).$$

d) (i) Da $f_0(\lambda) = e^0 = 1$ für alle $\lambda \in \sigma(A)$, ist $f_0(D) = I$. Hieraus folgt

$$e^{0A} = f_0(A) = S^*f_0(D)S = S^*S = I.$$

(ii) Die Aussage folgt direkt aus der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion und b):

$$e^{(z+w)A} = f_{z+w}(A) = (f_z\cdot f_w)(A) \overset{b)}{=} f_z(A)f_w(A) = e^{zA}e^{wA}, \quad z,w\in\mathbb{C}.$$

(iii) Sei $t\in\mathbb{R}$. Da $\overline{f_{it}} = f_{-it}$, folgern wir aus c)

$$(e^{itA})^* = (f_{it}(A))^* \overset{c)}{=} \overline{f_{it}}(A) = f_{-it}(A) = e^{-itA}.$$

Hieraus und aus (i),(ii) folgern wir

$$(e^{itA})^*e^{itA} = e^{-itA}e^{itA} \overset{(ii)}{=} e^{(-it+it)A} = e^{0A} \overset{i)}{=} I.$$

Analog zeigt man $e^{itA}(e^{-itA})^* = I$. Also ist e^{itA} unitär.

Aufgabe 22 (Tutorium)

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1\\ -1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

a) Machen Sie sich klar, dass A diagonalisierbar ist. Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix $S\in\mathbb{R}^{3\times3}$, sodass S^TAS diagonal ist.

b) Berechnen Sie A^k für alle $k\in\mathbb{N}$.

Lösungsvorschlag:

a) Da A symmetrisch ist, folgt insbesondere, dass A hermitesch ist. Daher folgt die Diagonalisierbarkeit von A aus dem Spektralsatz für hermitesche Matrizen (Satz 18.8 (4)).
Zunächst bestimmen wir das charakteristische Polynom p_A mit Hilfe der Regel von Sarrus:

$$p_A(\lambda) = \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & 1\\ -1 & 2-\lambda & 1\\ 1 & 1 & 2-\lambda\end{pmatrix} = (2-\lambda)^3 - 1 - 1 - 3\cdot(2-\lambda)$$

$$
\begin{aligned}
&= 8 - 12\lambda + 6\lambda^2 - \lambda^3 - 8 + 3\lambda \\
&= -\lambda(\lambda^2 - 6\lambda + 9) \\
&= -\lambda(\lambda - 3)^2, \quad \lambda \in \mathbb{C}.
\end{aligned}
$$

Nach Satz 18.2 sind die Eigenwerte von A genau die Nullstellen von p_A. Hieraus folgt, dass A die Eigenwerte $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 3$ hat. Wir bestimmen nun die Eigenräume $\mathrm{Eig}_A(\lambda_i)$ für $i = 1, 2, 3$. Da $\mathrm{Eig}_A(\lambda_i) = \mathrm{Kern}(A - \lambda_i I)$ gilt, müssen wir zur Bestimmung von $\mathrm{Eig}_A(\lambda_i)$ das homogene lineare Gleichungssystem

$$
(A - \lambda_i I)x = 0 \tag{1}
$$

lösen.

- $\mathrm{Eig}_A(\lambda_1) = \mathrm{Kern}(A)$: Man sieht sofort, dass die ersten beiden Spalten von A linear unabhängig sind und die dritte Spalte die Summe der ersten beiden Spalten ist. Hieraus folgt

$$
\mathrm{Eig}_A(\lambda_1) = \mathrm{Kern}(A) = \mathrm{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.
$$

  Alternativ kann man (1) mit Hilfe des Gaußschen Eliminationsverfahrens explizit lösen:

$$
A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} | \cdot \frac{1}{2} \quad | \cdot (-\frac{1}{2}) \\ \longleftarrow + \\ \longleftarrow + \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ | \cdot (-1) \\ \longleftarrow + \end{matrix}
$$

$$
\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \; | : \tfrac{3}{2} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
$$

  Also erfüllt $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ die Gleichung $Ax = 0$ genau dann, wenn

$$
\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 & = & \frac{1}{2}(x_2 - x_3) \\ x_2 & = & -x_3 \end{array} \right. \iff x \in \mathrm{lin}\{v_1\}, \; v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.
$$

- $\mathrm{Eig}_A(\lambda_2) = \mathrm{Eig}_A(\lambda_3) = \mathrm{Kern}(A - 3I)$: Es ist

$$
A - 3I = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.
$$

  Die ersten beiden Spalten von $A - 3I$ sind identisch und die dritte Spalte unterscheidet sich von den ersten beiden nur um den Faktor (-1). Hieraus folgt sofort, dass

$$
\mathrm{Eig}_A(3) = \mathrm{Kern}(A - 3I) = \mathrm{lin}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.
$$

Alternativ kann man wieder das Gaußsche Eliminationsverfahren nutzen, um den Eigenraum $\mathrm{Eig}_A(3) = \mathrm{Kern}(A - 3I)$ zu bestimmen:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \mid \cdot (-1) \\ \longleftarrow + \\ \longleftarrow + \end{array} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Also folgt für $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, dass $(A - 3I)x = 0$ genau dann gilt, wenn

$$-x_1 - x_2 + x_3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 &= -x_2 + x_3 \\ x_2 &= x_2 + 0 \\ x_3 &= 0 + x_3 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \mathrm{lin}\,\{v_2, v_3\}\,,\ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wir haben also eine Basis aus Eigenvektoren gefunden:

$$\mathbb{R}^3 = \mathrm{lin}\{v_1, v_2, v_3\} = \mathrm{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Da A symmetrisch (und damit insbesondere hermitesch) ist, stehen nach Satz 18.8 (3) Eigenräume zu verschiedenen Eigenwerten orthogonal zueinander, d.h., es gilt $\mathrm{Eig}_A(0) \perp \mathrm{Eig}_A(3)$. Allerdings müssen wir noch die Eigenvektoren zum selben Eigenwert orthogonalisieren. Für $\mathrm{Eig}_A(0)$ ist nichts zu tun, da dieser Raum eindimensional ist. Den Raum $\mathrm{Eig}_A(3)$ orthogonalisieren wir mit dem Gram-Schmidt-Verfahren (vgl. Satz 15.2, Skript):

$$c_2 = v_2;$$

$$c_3 = v_3 - \frac{(v_3|c_2)}{(c_2|c_2)} c_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Normieren wir die Vektoren v_1, c_2, c_3, erhalten wir eine aus Eigenvektoren bestehende Orthonormalbasis $\{s_1, s_2, s_3\}$ des $\mathbb{R}^3$, wobei

$$s_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, s_2 = \frac{c_2}{\|c_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, s_3 = \frac{c_3}{\|c_3\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Definieren wir nun

$$S := (s_1, s_2, s_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3},$$

so sehen wir sofort, dass S eine orthogonale Matrix ist, d.h., es gilt $S^T S = S S^T = I$ oder äquivalent $S^{-1} = S^T$. Denn: Sind $n \in \mathbb{N}$ und $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$, so ist M genau dann orthogonal, falls die Spalten von M eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^n$ bilden. Dies ist aber nach Konstruktion von S der Fall. Definieren wir schließlich

$$D := \mathrm{diag}(0, 3, 3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3},$$

so folgt nach S.51, Skript, dass

$$S^T AS = S^{-1}AS = D$$

gilt und somit $S^T AS$ diagonal ist.

b) Nach Aufgabenteil a) können wir $A = SDS^T$ schreiben mit der orthogonalen Matrix $S \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und der Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ wie oben. Sei nun $k \in \mathbb{N}$. Da S orthogonal ist, gilt $S^T S = I$. Deshalb ist

$$\begin{aligned} A^k &= \underbrace{(SDS^T)(SDS^T)\dots(SDS^T)(SDS^T)}_{k-\text{mal}} \\ &= SD\underbrace{(S^T S)}_{=I}D\dots D\underbrace{(S^T S)}_{=I}DS^T = SD^k S^T = 3^{k-1}SDS^T = 3^{k-1}A, \end{aligned}$$

wobei wir im vorletzten Schritt ausgenutzt haben, dass $D^k = 3^{k-1}D$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt, wie man sich leicht klarmacht.

Aufgabe 23 (Übung)

In dieser Aufgabe sehen wir, dass unendlich viele Eigenwerte existieren können, falls wir lineare Abbildungen in unendlichdimensionalen Vektorräumen betrachten. Wir definieren

$$\Phi\colon C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ \Phi(f) = f''.$$

Bestimmen Sie alle Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume.
Hinweis: Benutzen Sie Satz 12.4, HM I.

Lösungsvorschlag:

Zunächst einmal ist aus der HM I bekannt, dass die Ableitung linear ist. Damit ist Φ in der Tat eine lineare Abbildung. Wir wollen nun die Eigenwerte von Φ bestimmen. Eine Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ ist genau dann ein Eigenwert von Φ, falls es ein $f \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ gibt, sodass $\Phi(f) = \lambda f$ gilt. Die Gleichung $\Phi(f) = \lambda f$ ist aber äquivalent zu

$$f'' - \lambda f = 0. \tag{2}$$

Also müssen wir für gegebenes $\lambda \in \mathbb{R}$ die Lösungen von (2) untersuchen. Nun ist die Gleichung (2) eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Mit Hilfe von Satz 12.4 können wir aber solche Gleichungen explizit lösen. Hierzu betrachten wir das zur Gleichung zugehörige charakteristische Polynom

$$p(z) = z^2 - \lambda, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Um Satz 12.4 verwenden zu können, müssen wir die Nullstellen des charakteristischen Polynoms p bestimmen. Für $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$p(z) = 0 \iff z^2 = \lambda.$$

Wir führen nun die Fallunterscheidung $\lambda < 0$, $\lambda = 0$ und $\lambda > 0$ durch.

1. Fall: $\lambda < 0$:
In diesem Fall sind die Nullstellen von p rein imaginär und es gilt

$$z_1 = i\sqrt{|\lambda|} \text{ und } z_2 = -i\sqrt{|\lambda|}.$$

Nach Satz 12.4 ist dann die allgemeine Lösung von (2) gegeben durch

$$f(x) = c_1 \cos\left(\sqrt{|\lambda|}x\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{|\lambda|}x\right), \quad x \in \mathbb{R},$$

mit Koeffizienten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Dies bedeutet gerade, dass

$$\operatorname{Eig}_\Phi(\lambda) = \operatorname{lin}\left\{f_1^{(\lambda)}, f_2^{(\lambda)}\right\}$$

mit $f_1^{(\lambda)}, f_2^{(\lambda)} \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ definiert durch $f_1^{(\lambda)}(x) := \cos\left(\sqrt{|\lambda|x}\right)$ und $g_1^{(\lambda)}(x) := \sin\left(\sqrt{|\lambda|}x\right)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
2. Fall: $\lambda = 0$:
In diesem Fall sind

$$z_1 = z_2 = 0$$

die Nullstellen von p. Nach Satz 12.4 ist die allgemeine Lösung von (2) gegeben durch

$$f(x) = c_1 + c_2 x, \quad x \in \mathbb{R},$$

mit Koeffizienten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Dies bedeutet, dass

$$\operatorname{Eig}_\Phi(0) = \operatorname{lin}\left\{f_1^{(0)}, f_2^{(0)}\right\}$$

mit $f_1^{(0)}, f_2^{(0)} \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ definiert durch $f_1^{(\lambda)}(x) := 1$ und $g_1^{(\lambda)}(x) := x$, $x \in \mathbb{R}$.
3. Fall: $\lambda > 0$:
In diesem Fall sind

$$z_1 = \sqrt{\lambda} \text{ und } z_2 = -\sqrt{\lambda}$$

die Nullstellen von p. Nach Satz 12.4 ist die allgemeine Lösung von (2) gegeben durch

$$f(x) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}, \quad x \in \mathbb{R},$$

mit Koeffizienten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Dies bedeutet gerade, dass

$$\operatorname{Eig}_\Phi(\lambda) = \operatorname{lin}\left\{f_1^{(\lambda)}, f_2^{(\lambda)}\right\}$$

mit $f_1^{(\lambda)}, f_2^{(\lambda)} \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ definiert durch $f_1^{(\lambda)}(x) := e^{\sqrt{\lambda}x}$ und $f_2^{(\lambda)}(x) := e^{-\sqrt{\lambda}x}$, $x \in \mathbb{R}$.

Zusammenfassend gilt also, dass jedes(!) $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von Φ ist und die zugehörigen Eigenräume (jeweils zweidimensional sind und) durch $\operatorname{Eig}_\Phi(\lambda) = \operatorname{lin}\left\{f_1^{(\lambda)}, f_2^{(\lambda)}\right\}$ gegeben sind, wobei für alle $x \in \mathbb{R}$

$$f_1^{(\lambda)}(x) = \begin{cases} \cos\left(\sqrt{|\lambda|}x\right) & \text{für } \lambda < 0, \\ 1 & \text{für } \lambda = 0, \\ e^{\sqrt{|\lambda|}x} & \text{für } \lambda > 0 \end{cases}$$

und

$$f_2^{(\lambda)}(x) = \begin{cases} \sin\left(\sqrt{|\lambda|}x\right) & \text{für } \lambda < 0, \\ 1 & \text{für } \lambda = 0, \\ e^{-\sqrt{|\lambda|}x} & \text{für } \lambda > 0. \end{cases}$$

Aufgabe 24 (Tutorium)

Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 7 \\ 6 & 2 & -6 \\ -4 & 0 & 6 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -6 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie für A und B jeweils die Eigenwerte und die dazugehörigen Eigenräume. Ermitteln Sie, falls möglich, invertierbare Matrizen $S_A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ bzw. $S_B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, sodass $S_A^{-1}AS_A$ bzw. $S_B^{-1}BS_B$ Diagonalgestalt hat.

Lösungsvorschlag:

Wir bestimmen zunächst die charakteristischen Polynome p_A und p_B. Zur Berechnung von p_A entwickeln wir nach der zweiten Spalte und erhalten für

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -5-\lambda & 0 & 7 \\ 6 & 2-\lambda & -6 \\ -4 & 0 & 6-\lambda \end{pmatrix} &= (2-\lambda)\det \begin{pmatrix} -5-\lambda & 7 \\ -4 & 6-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (2-\lambda)\left[(-5-\lambda)(6-\lambda)+28\right] \\ &= (2-\lambda)\left[\lambda^2-\lambda-2\right] \\ &= (2-\lambda)(\lambda+1)(\lambda-2) = -(\lambda-2)^2(\lambda+1), \quad \lambda \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Zur Berechnung von p_B benutzen wir die Regel von Sarrus und erhalten

$$\begin{aligned} p_B(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 2 \\ -2 & -2-\lambda & -6 \\ 1 & 2 & 5-\lambda \end{pmatrix} \\ &= -(2-\lambda)(2+\lambda)(5-\lambda) \underbrace{-6-8+2(2+\lambda)+2(5-\lambda)}_{=0} +12(2-\lambda) \\ &= (2-\lambda)\left[-\left(10+3\lambda-\lambda^2\right)+12\right] \\ &= (2-\lambda)(2-3\lambda+\lambda^2) \\ &= (2-\lambda)(\lambda-1)(\lambda-2) = -(\lambda-2)^2(\lambda-1), \quad \lambda \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Da die Eigenwerte einer Matrix gerade die Nullstellen ihres charakteristischen Polynoms sind, folgt, dass A die Eigenwerte $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -1$ und B die Eigenwerte $\mu_1 = \mu_2 = 2$, $\mu_3 = 1$ hat. Nun bestimmen wir die zu den Eigenwerten gehörigen Eigenräume. Wir beginnen mit den Eigenräumen $\mathrm{Eig}_A(\lambda_i)$.

- $\mathrm{Eig}_A(2) = \mathrm{Kern}(A-2I)$: Es ist

$$A - 2I = \begin{pmatrix} -7 & 0 & 7 \\ 6 & 0 & -6 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

  Wir sehen sofort, dass $\mathrm{rg}(A-2I) = 1$, also nach dem Rangsatz $\dim(\mathrm{Kern}(A-2I)) = 2$ ist. Nun gilt für $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$

$$x \in \mathrm{Kern}(A-2I) \iff (A-2I)x = 0 \iff x_1 \begin{pmatrix} -7 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 7 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

  Man sieht schnell, dass $v_1 := (0,1,0)$, $v_2 := (1,0,1) \in \mathbb{R}^3$ linear unabhängige Lösungen der obigen linearen Gleichung $(A-2I)x = 0$ sind. Deshalb ist

$$\mathrm{Eig}_A(2) = \mathrm{Kern}(A-2I) = \mathrm{lin}\{v_1, v_2\}.$$

- $\mathrm{Eig}_A(-1) = \mathrm{Kern}(A+I)$: Wir müssen die Gleichung $(A+I)x = 0$ lösen. Durch elementare Zeilenumformungen erhält man

$$A + I = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 7 \\ 6 & 3 & -6 \\ -4 & 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{matrix} \mid \cdot 6 \quad \mid \cdot(-1) \\ \mid \cdot 4 \; + \\ + \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -4 & 0 & 7 \\ 0 & 12 & 18 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid : 6 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -4 & 0 & 7 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

  Also gilt für $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ die Gleichung $(A+I)x = 0$ genau dann, wenn

$$\left\{ \begin{aligned} 4x_1 &= 7x_3 \\ 2x_2 &= -3x_3 \end{aligned} \right. \iff \left\{ \begin{aligned} x_1 &= \tfrac{7}{4}x_3 \\ x_2 &= -\tfrac{3}{2}x_3 \end{aligned} \right. \iff x \in \mathrm{lin}\{v_3\} \text{ mit } v_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

  Somit folgt

$$\mathrm{Eig}_A(-1) = \mathrm{Kern}(A+I) = \mathrm{lin}\{v_3\}.$$

  Wir haben also eine Basis aus Eigenvektoren von A gefunden:

$$\mathbb{R}^3 = \mathrm{lin}\{v_1, v_2, v_3\}.$$

  Folglich ist A diagonalisierbar. Definieren wir $S_A = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, so gilt

$$S_A^{-1} A S_A = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Wir kommen nun zu den Eigenräumen $\mathrm{Eig}_B(\mu_i)$. Hier gehen wir genauso vor wie oben.

- $\mathrm{Eig}_B(2) = \mathrm{Kern}(B-2I)$: Wir führen elementare Zeilenumformungen durch und erhalten

$$B - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & -4 & -6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & -6 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \mid \cdot 2 \\ + \\ \end{matrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Daher gilt für $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, dass $x \in \operatorname{Kern}(B - 2I)$ genau dann gilt, wenn

$$(B - 2I)x = 0 \iff \begin{cases} x_1 = & -2x_2 \quad -3x_3 \\ x_2 = & \qquad\quad\; -2x_3 \end{cases}$$

Es folgt

$$\operatorname{Eig}_B(2) = \operatorname{Kern}(B - 2I) = \operatorname{lin}\{w_1\} \text{ mit } w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Die geometrische Vielfachheit des Eigenwertes $\mu = 2$ ist folglich $\dim \operatorname{Eig}_B(2) = 1$ und somit *echt* kleiner als seine algebraische Vielfachheit ($= 2$). Deshalb ist nach Satz 18.6 die Matrix B *nicht* diagonalisierbar. Der Vollständigkeit halber bestimmen wir aber noch den Eigenraum $\operatorname{Eig}_B(1)$:

- $\operatorname{Eig}_B(1) = \operatorname{Kern}(B - I)$: Es ist

$$B - I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & -6 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Für $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ gilt damit

$$(B - I)x = 0 \iff x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Da die dritte Spalte von $B - I$ das Doppelte der zweiten Spalte von $B - I$ ist, sehen wir, dass $w_2 = (0, 2, -1) \in \mathbb{R}^3$ eine Lösung von $(B - I)x = 0$ ist. Da die geometrische Vielfachheit eines Eigenwertes immer kleiner gleich seiner algebraischen Vielfachheit sein muss (vgl. Satz 18.2) und die algebraische Vielfachheit des Eigenwertes $\mu_3 = 1$ gleich 1 ist, muss die geometrische Vielfachheit des Eigenwertes $\mu_3 = 1$ ebenfalls 1 sein (0 ist nicht möglich, da es immer mindestens einen Eigenvektor zu einem Eigenwert geben muss). Daher folgern wir

$$\operatorname{Eig}_B(1) = \operatorname{Kern}(A - I) = \operatorname{lin}\{w_2\}.$$

Bemerkung: Die Diagonalisierbarkeit von B scheitert daran, dass die algebraische Vielfachheit des Eigenwertes $\mu = 2$ zwar 2 ist, der zugehörige Eigenraum aber nur eindimensional (statt zweidimensional) ist. Aus dem Satz über die Jordansche Normalform, Satz 18.11, folgt aber, dass es eine invertierbare Matrix $S \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ gibt, sodass

$$S^{-1}BS = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ist. Damit ist also B „fast“ ähnlich zu einer Diagonalmatrix.