

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

5 Übungsblatt

Aufgabe 25 (Übung)

Im Folgenden seien $n \in \mathbb{N}$ und $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch.

- a) Zeigen Sie: AB ist symmetrisch $\Leftrightarrow AB = BA$.
- b) Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.
 - (i) Ist A positiv definit und $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertierbar, so ist auch $S^T A S$ positiv definit.
 - (ii) Ist A indefinit, so gibt es ein $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, sodass $q_A(x) := (Ax|x) = 0$ ist.
- c) Sei $\sigma(A) := \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ die Menge der Eigenwerte von A und $\rho := \max_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|$. Zeigen Sie

$$\max_{\|x\|=1} |q_A(x)| = \rho.$$

Aufgabe 26 (Tutorium)

- a) Für $\alpha \in \mathbb{R}$ sei

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & -1 & 0 \\ -1 & \alpha & -1 \\ 0 & -1 & \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}.$$

Untersuchen Sie A_α auf Definitheit.

- b) Seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, C = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

- (i) Skizzieren Sie die Mengen $M_1 := \{x \in \mathbb{R}^2 : q_A(x) = 1\}$ und $M_2 := \{x \in \mathbb{R}^2 : q_B(x) = 1\}$.
- (ii) Skizzieren Sie die Menge $M_3 := \{x \in \mathbb{R}^2 : q_C(x) = 1\}$. Wie hängt M_3 mit M_1 zusammen?
Hinweis: Diagonalisieren Sie C .

Aufgabe 27 (Übung)

- a) Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Stetigkeit.

$$\begin{aligned}
\text{(i)} \quad f_1: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f_1(x, y) &:= \begin{cases} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1} & (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \\ 2 & (x, y) = (0, 0), \end{cases} \\
\text{(ii)} \quad f_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f_2(x, y) &:= \begin{cases} \frac{2x^2y^3}{x^8+y^4} & (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \\ 0 & (x, y) = (0, 0), \end{cases} \\
\text{(iii)} \quad f_3: D \rightarrow \mathbb{R}^3, f_3(x, y, z) &:= \begin{cases} \frac{x^2y}{z^3} & (x, y, z) \in D \setminus \{(0, 0, 0)\}, \\ 0 & (x, y, z) = (0, 0, 0), \end{cases}
\end{aligned}$$

wobei $D := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \neq 0\} \cup \{(0, 0, 0)\}$.

- b) Seien $m, n \in \mathbb{N}$ und $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig. Zeigen Sie, dass für jede abgeschlossene Menge $A \subseteq \mathbb{R}^m$ die Urbildmenge $f^{-1}(A) \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen ist.
- c) Geben Sie ein Beispiel einer stetigen Funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ und einer abgeschlossenen Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$, sodass $f(A) \subseteq \mathbb{R}^m$ nicht abgeschlossen ist.

Aufgabe 28 (Tutorium)

Die Funktionen $f, g, h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ seien für $(x, y) \neq 0$ durch

$$f(x, y) := \frac{xy^2}{x^2 + y^2}, \quad g(x, y) := \frac{xy^2}{x^2 + y^4}, \quad h(x, y) := \frac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x - y)^2}$$

gegeben und $f(0, 0) := g(0, 0) := h(0, 0) := 0$. Zeigen Sie:

- a) Die Funktion f ist stetig auf $\mathbb{R}^2$.
- b) Die Funktion g ist in $(0, 0)$ nicht stetig, aber g ist im Nullpunkt *längs jeder Geraden* stetig:
Für jedes feste $\varphi \in \mathbb{R}$ gilt $g(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)) \rightarrow g(0, 0)$ für $r \rightarrow 0+$.
- c) Die Funktion h ist in $(0, 0)$ nicht stetig, aber die Grenzwerte

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} h(x, y) \quad \text{und} \quad \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} h(x, y)$$

existieren und stimmen mit $h(0, 0)$ überein.

Aufgabe 29 (Übung)

- a) Seien $n \in \mathbb{N}$ und A eine beliebige Indexmenge. Seien ferner für jedes $\alpha \in A$ die Menge $O_\alpha \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und die Menge $A_\alpha \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen. Zeigen Sie:
- (i) Für beliebige $\alpha, \beta \in A$ ist $O_\alpha \cap O_\beta$ offen und $A_\alpha \cup A_\beta$ abgeschlossen.
- (ii) Die Vereinigung $\bigcup_{\alpha \in A} O_\alpha \subseteq \mathbb{R}^n$ ist offen und der Durchschnitt $\bigcap_{\alpha \in A} A_\alpha$ ist abgeschlossen.
- b) Überprüfen Sie folgende Mengen auf Offenheit und Abgeschlossenheit.
- (i) $M_1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^3 + 2y^3 < 4\}$,
- (ii) $M_2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^3 - e^{-xy} \leq 3 \text{ und } x \leq y\}$,
- (iii) $M_3 := (0, 1] \times (0, 1] \subseteq \mathbb{R}^2$.

Aufgabe 30 (Tutorium)

Gegeben seien folgende Kurven:

$$\gamma_1: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, \gamma_1(t) := (\cos(t), \sin(t), t),$$

$$\gamma_2: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \gamma_2(t) := (t - \sin(t), 1 - \cos(t)),$$

$$\gamma_3: [0, \vartheta] \rightarrow \mathbb{R}^2, \gamma_3(t) := (t \cos(t), t \sin(t)), \quad \text{wobei } \vartheta > 0 \text{ fest ist.}$$

- a) Skizzieren Sie die Kurven γ_1, γ_2 und γ_3 . Was beschreiben die Kurven anschaulich?
- b) Berechnen Sie die Längen $L(\gamma_1), L(\gamma_2), L(\gamma_3)$ der Kurven $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$.

Hinweis: Zur Berechnung von $L(\gamma_2)$ verwende man die Substitution $t = 2u$ und die Identität $\cos^2(2u) = \cos^2(u) - \sin^2(u)$, $u \in \mathbb{R}$. Für $L(\gamma_3)$ verwende man die Substitution $t = \sinh(u)$.