Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
M.Sc. Yonas Mesfun

SS 2020
21.05.2020

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

5. Übungsblatt

Aufgabe 25 (Übung)

Im Folgenden seien $n \in \mathbb{N}$ und $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch.

a) Zeigen Sie: AB ist symmetrisch $\Leftrightarrow AB = BA$.

b) Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

(i) Ist A positiv definit und $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertierbar, so ist auch $S^T AS$ positiv definit.

(ii) Ist A indefinit, so gibt es ein $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, sodass $q_A(x) := (Ax|x) = 0$ ist.

c) Sei $\sigma(A) := \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ die Menge der Eigenwerte von A und $\rho := \max_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|$. Zeigen Sie

$$\max_{\|x\|=1} |q_A(x)| = \rho.$$

Lösungsvorschlag:

a) Es ist AB symmetrisch $\Leftrightarrow AB = (AB)^T \Leftrightarrow AB = B^T A^T \Leftrightarrow AB = BA$, wobei wir für die letzte Äquivalenz ausgenutzt haben, dass $A^T = A$ und $B^T = B$ auf Grund der Symmetrie von A und B gilt.

b) (i) Die Aussage ist wahr. Sei für den Nachweis der Aussage die Matrix A positiv definit und $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertierbar. Wir müssen zeigen, dass dann $C := S^T AS$ auch positiv definit ist. Zunächst halten wir fest, dass C symmetrisch ist, denn

$$C^T = (S^T AS)^T = S^T A^T (S^T)^T = S^T AS = C,$$

wobei wir für die dritte Gleichheit ausgenutzt haben, dass A symmetrisch ist, und dass $(S^T)^T = S$ ist. Ist nun $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, so gilt auch $Sx \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, da S invertierbar ist. Aus der positiven Definitheit von A folgt dann

$$q_C(x) = (Cx|x) = (S^T (ASx)|x) = (A(Sx)|Sx) > 0.$$

Da $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ beliebig gewählt war, ist also C positiv definit.

(ii) Auch diese Aussage ist wahr. Sei für den Beweis der Aussage die Matrix A indefinit. Dann gibt es $u, v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, sodass $q_A(u) > 0$ und $q_A(v) < 0$ gilt. Wir stellen zunächst fest, dass dann u und v linear unabhängig sein müssen: Denn wären u und v linear abhängig, so wäre $v = \alpha u$ für ein $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und damit

$$q_A(v) = (A(\alpha u)|(\alpha u)) = \alpha^2 (Au|u) = \underbrace{\alpha^2}_{>0} \underbrace{q_A(u)}_{>0} > 0,$$

im Widerspruch zu $q_A(v) < 0$.
Wir definieren nun $h := v - u$ und betrachten die Funktion

$$\varphi\colon [0,1] \to \mathbb{R},\ \varphi(t) = q_A(u + th).$$

Dann ist φ stetig, da φ eine quadratische Polynomfunktion ist. In der Tat,

$$\varphi(t) = (A(u+th)|u+th) = (Ah|h)t^2 + 2(Au|h)t + (Au|u), \quad t \in [0,1].$$

Nun gilt $\varphi(0) = q_A(u) > 0$ und $\varphi(1) = q_A(v) < 0$. Nach dem Nullstellensatz von Bolzano existiert daher ein $\xi \in (0,1)$ mit $\varphi(\xi) = 0$. Wir definieren nun $x := u + \xi h \in \mathbb{R}^n$. Da

$$x = u + \xi h = u + \xi(v - u) = (1 - \xi)u + \xi v$$

ist und (wie wir bereits festgestellt haben) u, v linear unabhängig sind, muss $x \neq 0$ sein. Also ist tatsächlich $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und aus der Definition von ξ folgt schließlich

$$q_A(x) = q_A(u + \xi h) = \varphi(\xi) = 0.$$

Damit ist die Aussage bewiesen.

c) Sei $\lambda \in \sigma(A)$. Dann gibt es einen Eigenvektor $u \in \mathbb{R}^n$ zum Eigenwert λ mit $\|u\| = 1$. Es folgt

$$|\lambda| = |\lambda(u|u)| = |(\lambda u|u)| = |(Au|u)| = |q_A(u)| \leq \max_{\|x\|=1} |q_A(x)|.$$

Da dies für alle $\lambda \in \sigma(A)$ gilt, erhalten wir hieraus

$$\rho \leq \max_{\|x\|=1} |q_A(x)|.$$

Für die umgekehrte Ungleichung nutzen wir, dass A symmetrisch ist: Da A symmetrisch ist, existiert nach dem Spektralsatz eine Orthonormalbasis $\{u_1, \ldots, u_n\}$ des $\mathbb{R}^n$, sodass u_i ein Eigenvektor zum Eigenwert λ_i ist. Ist nun $x \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x\| = 1$, so können wir $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i$ mit Koeffizienten $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, $\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 = 1$, schreiben. Es folgt

$$\begin{aligned}
|q_A(x)| &= \left| \left(A \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i u_i \right) \middle| \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i \right) \right| = \left| \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i u_i \middle| \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i \right) \right| \\
&= \left| \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i^2 \right| \leq \sum_{i=1}^n |\lambda_i| \alpha_i^2 \leq \sum_{i=1}^n \rho \alpha_i^2 = \rho.
\end{aligned}$$

Da $x \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x\| = 1$ beliebig gewählt war, muss damit auch

$$\max_{\|x\|=1} |q_A(x)| \leq \rho$$

gelten. Insgesamt folgt also

$$\max_{\|x\|=1} |q_A(x)| = \rho.$$

Aufgabe 26 (Tutorium)

a) Für $\alpha \in \mathbb{R}$ sei

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & -1 & 0 \\ -1 & \alpha & -1 \\ 0 & -1 & \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Untersuchen Sie A_α auf Definitheit.

b) Seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, C = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

(i) Skizzieren Sie die Mengen $M_1 := \{x \in \mathbb{R}^2 \colon q_A(x) = 1\}$ und $M_2 := \{x \in \mathbb{R}^2 \colon q_B(x) = 1\}$.

(ii) Skizzieren Sie die Menge $M_3 := \{x \in \mathbb{R}^2 \colon q_C(x) = 1\}$. Wie hängt M_3 mit M_1 zusammen? Hinweis: Diagonalisieren Sie C.

Lösungsvorschlag:

a) Wir wollen die Definitheit der Matrix A_α mit Hilfe ihrer Eigenwerte untersuchen. Deshalb bestimmen wir zunächst die Eigenwerte von A_α. Hierzu berechnen wir das charakteristische Polynom p_{A_α} von A_α mit Hilfe der Regel von Sarrus:

$$\begin{aligned} p_{A_\alpha}(\lambda) = \det(A_\alpha - \lambda I) &= \det \begin{pmatrix} \alpha-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & \alpha-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & \alpha-\lambda \end{pmatrix} \\ &= -(\lambda-\alpha)^3 + 2(\lambda-\alpha) \\ &= -(\lambda-\alpha)\left[(\lambda-\alpha)^2 - 2\right] \\ &= -(\lambda-\alpha)\left[\lambda-(\alpha+\sqrt{2})\right]\left[\lambda-(\alpha-\sqrt{2})\right], \quad \lambda \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Da die Nullstellen des charakteristischen Polynoms p_{A_α} gerade die Eigenwerte von A_α sind, erhalten wir $\lambda_1 = \alpha - \sqrt{2}$, $\lambda_2 = \alpha$, $\lambda_3 = \alpha + \sqrt{2}$ als Eigenwerte von A_α. Nun können wir die Definitheit von A_α am Vorzeichen der Eigenwerte ablesen. Beispielsweise ist nach Satz 18.11 die Matrix A_α genau dann positiv definit, wenn $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0$ sind. Wegen $\lambda_3 > \lambda_2 > \lambda_1$ ist die Bedingung $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0$ äquivalent zu $\lambda_1 > 0$. Deshalb ist

$$A_\alpha \text{ positiv definit} \iff \lambda_1 > 0 \iff \alpha > \sqrt{2}.$$

Mit Hilfe von Satz 18.11 kann man analog die restlichen Fälle analysieren und erhält dann

$$A_\alpha \text{ ist } \begin{cases} \text{positiv definit} & \text{für } \alpha > \sqrt{2}, \\ \text{positiv semidefinit} & \text{für } \alpha = \sqrt{2}, \\ \text{indefinit} & \text{für } \alpha \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2}), \\ \text{negativ semidefinit} & \text{für } \alpha = -\sqrt{2}, \\ \text{negativ definit} & \text{für } \alpha < -\sqrt{2}. \end{cases}$$

b) (i) Für $a, b > 0$ beschreiben die Mengen

$$E_{a,b} := \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \colon \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1\right\} \text{ bzw. } H_{a,b} := \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \colon \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 1\right\}$$

eine Ellipse bzw. eine Hyperbel. Für $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ ist aber $q_A(x) = x^T A x = x_1^2 + 4x_2^2$ und $q_B(x) = x^T B x = x_1^2 - x_2^2$, sodass wir erkennen, dass $M_1 = E_{1,\frac{1}{2}}$ und $M_2 = H_{1,1}$ ist. Damit beschreibt M_1 eine Ellipse und M_2 eine Hyperbel.

(ii) Die Menge M_3 entsteht aus M_1 durch Drehung um $45°$ Grad gegen den Uhrzeigersinn und beschreibt damit auch eine Ellipse. Um dies besser erkennen zu können, diagonalisieren wir C orthogonal (was möglich ist, da C symmetrisch ist). Es ist

$$p_C(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \frac{5}{2} - \lambda & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} - \lambda \end{pmatrix} = \left(\frac{5}{2} - \lambda\right)^2 - \frac{9}{4} = \lambda^2 - 5\lambda + 4 = (\lambda - 1)(\lambda - 4), \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Damit ist C zu der Diagonalmatrix $\operatorname{diag}(1, 4) = A$ ähnlich. Man verifiziert schnell, dass

$$\operatorname{Eig}_C(1) = \operatorname{lin}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \quad \text{und} \quad \operatorname{Eig}_C(4) = \operatorname{lin}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

Somit ist

$$C = SAS^T, S = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix S ist hierbei eine orthogonale Matrix, die geometrisch einer Drehung um $45°$ Grad gegen den Uhrzeigersinn entspricht. Aus der Darstellung $C = SAS^T$ folgt für $x \in \mathbb{R}^2$

$$x \in M_3 \iff x^T(SAS^T)x = 1 \iff (S^T x)^T A (S^T x) = 1 \iff S^T x \in M_1.$$

Dies impliziert $M_1 = S^T(M_3)$, was wegen $S^{-1} = S^T$ äquivalent zu $M_3 = S(M_1)$ ist. Damit ist M_3, wie zu Beginn behauptet, die Ellipse M_1 um $45°$ gegen den Uhrzeigersinn gedreht.

Bemerkung: Der Menge M_3 bzw. der sie beschreibenden Gleichung $q_C(x) = \frac{5}{2}x_1^2 + \frac{5}{2}x_2^2 - 3xy = 1$, $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, ist es schwieriger anzusehen, dass sie eine Ellipse beschreibt. Indem man das Koordinatensystem aber so dreht, dass die neuen Achsen in Richtung der Eigenvektoren von C zeigen, haben wir allerdings erkannt, dass die Menge M_3 dann in den neuen Koordinaten $\tilde{x} = S^T x$ durch die einfachere Gleichung $q_A(\tilde{x}) = \tilde{x}_1^2 + 4\tilde{x}_2^2 = 1$ beschrieben ist und damit genau mit der Ellipse M_1 zusammenfällt. Dieses Verfahren nennt man *Hauptachsentransformation* und findet auch Anwendung in der Mechanik (z.B. bei der Untersuchung von Trägheitstensoren bei der Rotation starrer Körper).

Aufgabe 27 (Übung)

a) Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Stetigkeit.

(i) $f_1 \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f_1(x, y) := \begin{cases} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1} & (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \\ 2 & (x, y) = (0, 0), \end{cases}$

(ii) $f_2\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f_2(x,y) := \begin{cases} \frac{2x^2y^3}{x^8+y^4} & (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \\ 0 & (x,y) = (0,0), \end{cases}$

(iii) $f_3\colon D \to \mathbb{R}^3$, $f_3(x,y,z) := \begin{cases} \frac{x^2y}{z^3} & (x,y) \in D \setminus \{(0,0,0)\}, \\ 0 & (x,y,z) = (0,0,0), \end{cases}$

wobei $D := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \neq 0\} \cup \{(0,0,0)\}$.

b) Seien $m, n \in \mathbb{N}$ und $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ stetig. Zeigen Sie, dass für jede abgeschlossene Menge $A \subseteq \mathbb{R}^m$ die Urbildmenge $f^{-1}(A) \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen ist.

c) Geben Sie ein Beispiel einer stetigen Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ und einer abgeschlossenen Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$, sodass $f(A) \subseteq \mathbb{R}^m$ nicht abgeschlossen ist.

Lösungsvorschlag:

a) Die Funktionen f_1, f_2 bzw. f_3 sind auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ bzw. auf $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ stetig, da die Funktionen hier Produkte und Summen stetiger Funktionen sind (vgl. Satz 19.4). Interessant ist daher nur, ob die Funktionen f_1, f_2 bzw. f_3 im Punkt $(0,0)$ bzw. $(0,0,0)$ stetig sind.

(i) Wir definieren $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(x,y) = \sqrt{x^2+y^2+1}+1$. Da nach Satz 19.4 Kompositionen, Produkte und Summen stetiger Funktionen stetig sind, ist g stetig. Wir behaupten $f_1 = g$. In der Tat, $f_1(0,0) = 2 = g(0,0)$. Für $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ gilt

$$f_1(x,y) = \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1} = \frac{(x^2+y^2)(\sqrt{x^2+y^2+1}+1)}{(\sqrt{x^2+y^2+1}-1)\sqrt{x^2+y^2+1}+1)}$$

$$= \frac{(x^2+y^2)(\sqrt{x^2+y^2+1}+1)}{(x^2+y^2+1)-1} = \sqrt{x^2+y^2+1}+1 = g(x,y)$$

Somit ist $f_1 = g$ stetig.

(ii) Sei $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ eine Nullfolge in $\mathbb{R}$ mit $t_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir definieren

$$(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^2, (x_n, y_n) := (t_n, t_n^2), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dann gilt $(x_n, y_n) \to (0,0)$ für $n \to \infty$ und

$$f_2(x_n, y_n) = \frac{2t_n^2 t_n^6}{t_n^8 + t_n^8} = 1 \neq f_2(0,0) = 0 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Insbesondere folgt damit, dass

$$\lim_{n\to\infty} f_2(x_n, y_n) = 1 \neq 0 = f_2(0,0).$$

Also ist f_2 unstetig im Punkt $(0,0)$.

(iii) Sei wieder $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ eine Nullfolge, sodass $t_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt für die Folge $(t_n, t_n, t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^3$, dass $(t_n, t_n, t_n) \to (0,0,0)$ für $n \to \infty$. Es ist aber

$$f_3(t_n, t_n, t_n) = \frac{t_n^2 t_n}{t_n^3} = 1 \neq 0 = f_3(0,0,0) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Insbesondere gilt

$$\lim_{n\to\infty} f_3(t_n, t_n, t_n) = 1 \neq 0 = f_3(0,0,0).$$

Somit ist f_3 in $(0,0,0)$ unstetig.

b) Ist X eine Menge und $Y \subseteq X$ eine Teilmenge, so schreiben wir $Y^c := X \backslash Y$ für das Komplement von Y in X.
Seien nun $A \subseteq \mathbb{R}^m$ abgeschlossen und $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ stetig. Da A abgeschlossen ist, ist A^c offen. Nach Satz 19.4 ist dann auch $f^{-1}(A^c) \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und somit

$$f^{-1}(A) = ((f^{-1}(A))^c)^c = (f^{-1}(A^c))^c$$

als Komplement einer offenen Menge abgeschlossen. Hierbei haben wir für die zweite Gleichheit eine von mehreren Eigenschaften der Urbildabbildung benutzt, die als *Operationstreue der Urbildabbildung* bezeichnet werden: Sind X, Y beliebige Mengen und $g\colon X \to Y$ eine beliebige Funktion, so gilt

$$(g^{-1}(B))^c = g^{-1}(B^c) \quad \text{für alle } B \subseteq Y.$$

Obige Identität folgt direkt aus der Definition der Urbildabbildung und des Komplements einer Menge. In der Tat, für $x \in X$ gilt

$$x \in (g^{-1}(B))^c \iff x \notin g^{-1}(B) \iff g(x) \notin B \iff g(x) \in B^c \iff x \in g^{-1}(B^c).$$

c) Seien $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$ und $A := \mathbb{R}$. Dann ist f stetig und $A \subseteq \mathbb{R}$ abgeschlossen, aber $f(A) = (0, \infty)$ nicht abgeschlossen, denn die Folge $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq f(A)$ konvergiert gegen $0 \notin f(A)$, weshalb $f(A)$ nach Satz 19.2 nicht abgeschlossen sein kann.

Aufgabe 28 (Tutorium)

Die Funktionen $f, g, h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ seien für $(x, y) \neq 0$ durch

$$f(x,y) := \frac{xy^2}{x^2+y^2}, \quad g(x,y) := \frac{xy^2}{x^2+y^4}, \quad h(x,y) := \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$$

gegeben und $f(0,0) := g(0,0) := h(0,0) := 0$. Zeigen Sie:

a) Die Funktion f ist stetig auf $\mathbb{R}^2$.
b) Die Funktion g ist in $(0,0)$ nicht stetig, aber g ist im Nullpunkt *längs jeder Geraden* stetig: Für jedes feste $\varphi \in \mathbb{R}$ gilt $g(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)) \to g(0,0)$ für $r \to 0+$.
c) Die Funktion h ist in $(0,0)$ nicht stetig, aber die Grenzwerte

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} h(x,y) \quad \text{und} \quad \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} h(x,y)$$

existieren und stimmen mit $h(0,0)$ überein.

Lösungsvorschlag:

a) Die Stetigkeit von f in jedem Punkt $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ist klar, da f hier aus Produkten und Summen stetiger Funktionen hervorgeht (vgl. Satz 19.4). Für den Nachweis der Stetigkeit von f in $(0,0)$ bemerken wir zunächst, dass

$$0 \leq |f(x,y)| \leq |x| \quad \text{für alle } (x,y) \in \mathbb{R}^2. \tag{$*$}$$

Für $(x,y)=(0,0)$ ist dies wegen $f(0,0)=0$ klar. Ist $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, so folgt

$$0\leq|f(x,y)|\leq|x|\underbrace{\frac{y^2}{x^2+y^2}}_{\leq 1}\leq|x|.$$

Somit haben wir $(*)$ nachgewiesen. Sei nun eine beliebige Folge $(x_n,y_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq\mathbb{R}^2$ mit $(x_n,y_n)\to(0,0)$ $(n\to\infty)$ gegeben. Insbesondere gilt dann $|x_n|\to 0$ $(n\to\infty)$. Aus $(*)$ folgt nun

$$0\leq|f(x_n,y_n)|\leq|x_n|\to 0\quad(n\to\infty).$$

Wir folgern

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n,y_n)=0=f(0,0).$$

Somit ist f auch in $(0,0)$ stetig und damit insgesamt stetig auf $\mathbb{R}^2$.

b) Sei $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{R}$ eine Nullfolge in $\mathbb{R}$ mit $t_n\neq 0$ für alle $n\in\mathbb{N}$. Wir definieren

$$(x_n,y_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq\mathbb{R}^2,(x_n,y_n):=(t_n^2,t_n),\quad n\in\mathbb{N}.$$

Dann gilt $(x_n,y_n)\to(0,0)$ für $n\to\infty$ und

$$g(x_n,y_n)=\frac{(t_n^2)t_n^2}{(t_n^2)^2+t_n^4}=\frac{t_n^4}{t_n^4+t_n^4}=\frac{1}{2}\quad\text{für alle } n\in\mathbb{N}.$$

Wir folgern

$$\lim_{n\to\infty}g(x_n,y_n)=\frac{1}{2}\neq 0=g(0,0).$$

Somit ist g im Punkt $(0,0)$ nicht stetig. Wir zeigen nun, dass g im Nullpunkt längs jeder Geraden stetig ist: Sei hierfür $\varphi\in\mathbb{R}$ beliebig gewählt, aber fest. Ist $\cos(\varphi)=0$ oder $\sin(\varphi)=0$, so ist $g(r\cos(\varphi),r\sin(\varphi))=0$ für alle $r>0$, da der Zähler in der Definition von g dann verschwindet. In diesem Fall gilt dann also

$$\lim_{r\to 0+}g(r\cos(\varphi),r\sin(\varphi))=0=g(0,0).$$

Wir nehmen nun an, dass $\cos(\varphi)\neq 0$ und $\sin(\varphi)\neq 0$ gilt. Dann ist

$$0\leq|g(r\cos(\varphi),r\sin(\varphi))|=\frac{r|\cos(\varphi)|(r\sin(\varphi))^2}{(r\cos(\varphi))^2+(r\sin(\varphi))^4}=\frac{\overbrace{|\cos(\varphi)|\sin^2(\varphi)}^{\leq 1}}{\cos^2(\varphi)+\underbrace{r^2\sin^4(\varphi)}_{\geq 0}}\cdot r\leq\frac{1}{\underbrace{\cos^2(\varphi)}_{=\text{const.}}}\cdot r\to 0$$

für $r\to 0+$. Wir folgern

$$\lim_{r\to 0+}g(r\cos(\varphi),r\sin(\varphi))=0=g(0,0).$$

c) Sei $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq\mathbb{R}$ eine beliebige Nullfolge in $\mathbb{R}$ mit $t_n\neq 0$ für alle $n\in\mathbb{N}$. Wir definieren

$$(x_n,y_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq\mathbb{R}^2,(x_n,y_n):=(t_n,t_n),\quad n\in\mathbb{N}.$$

Dann gilt $(x_n, y_n) \to (0,0)$ für $n \to \infty$ und

$$h(x_n, y_n) = \frac{t_n^2 t_n^2}{t_n^2 t_n^2 + (t_n - t_n)^2} = 1 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N},$$

und damit

$$\lim_{n\to\infty} h(x_n, y_n) = 1 \neq 0 = h(0,0).$$

Damit kann h im Punkt $(0,0)$ nicht stetig sein. Ist $x = 0$, so folgt $h(x,y) = 0$ für $y \in \mathbb{R}$, weil dann der Zähler in der Definition von h verschwindet. Deshalb ist dann auch (trivialerweise) $\lim_{y\to 0} h(x,y) = 0$. Ist $x \neq 0$, so folgt

$$0 \leq |h(x,y)| \leq \frac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2} = \begin{cases} \frac{1}{1+\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{x}\right)^2} \to 0 & \text{für } y \to 0, y \neq 0, \\ 0 & \text{für } y = 0. \end{cases}$$

Also gilt auch in diesem Fall $\lim_{y\to 0} h(x,y) = 0$. Für jedes feste $x \in \mathbb{R}$ folgern wir also $\lim_{y\to 0} h(x,y) = 0$. Damit ist aber auch der iterierte Grenzwert

$$\lim_{x\to 0} \lim_{y\to 0} h(x,y) = 0.$$

Da h symmetrisch ist, d.h., weil $h(x,y) = h(y,x)$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ gilt, können wir in der obigen Argumentation die Rollen von x und y vertauschen und erhalten genauso

$$\lim_{y\to 0} \lim_{x\to 0} h(x,y) = 0.$$

Da $h(0,0) = 0$ ist, folgern wir schließlich

$$\lim_{x\to 0} \lim_{y\to 0} h(x,y) = h(0,0) = \lim_{y\to 0} \lim_{x\to 0} h(x,y).$$

Aufgabe 29 (Übung)

a) Seien $n \in \mathbb{N}$ und A eine beliebige Indexmenge. Seien ferner für jedes $\alpha \in \mathsf{A}$ die Menge $O_\alpha \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und die Menge $A_\alpha \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen. Zeigen Sie:

  (i) Für beliebige $\alpha, \beta \in \mathsf{A}$ ist $O_\alpha \cap O_\beta$ offen und $A_\alpha \cup A_\beta$ abgeschlossen.

  (ii) Die Vereinigung $\bigcup_{\alpha\in\mathsf{A}} O_\alpha \subseteq \mathbb{R}^n$ ist offen und der Durchschnitt $\bigcap_{\alpha\in\mathsf{A}} A_\alpha$ ist abgeschlossen.

b) Überprüfen Sie folgende Mengen auf Offenheit und Abgeschlossenheit.

  (i) $M_1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 < x^3 + 2y^3 < 4\}$,

  (ii) $M_2 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^3 - e^{-xy} \leq 3 \text{ und } x \leq y\}$,

  (iii) $M_3 := (0,1] \times (0,1] \subseteq \mathbb{R}^2$.

Lösungsvorschlag:

a) Seien $n \in \mathbb{N}$ und A eine beliebige Indexmenge. Seien ferner für jedes $\alpha \in \mathsf{A}$ die Menge $O_\alpha \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und die Menge $A_\alpha \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen. Wie in der Vorlesung bereits eingeführt, ist für $x \in \mathbb{R}^n$ und $\delta > 0$ die Menge $U_\delta(x) := \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| < \delta\}$ die offene Kugel um x mit Radius δ.

Wir zeigen zunächst die Offenheit von $O_\alpha \cap O_\beta$ für beliebige $\alpha, \beta \in \mathsf{A}$. Seien hierfür $\alpha, \beta \in \mathsf{A}$ und $x \in O_\alpha \cap O_\beta$. Weil O_α offen ist, existiert nach Definition der Offenheit einer Menge ein $\delta_\alpha > 0$, sodass $U_{\delta_\alpha}(x) \subseteq O_\alpha$. Und weil O_β auch offen ist, existiert genauso ein $\delta_\beta > 0$, sodass $U_{\delta_\beta}(x) \subseteq O_\beta$ gilt. Wir definieren $\delta := \min\{\delta_\alpha, \delta_\beta\} > 0$. Dann gilt $U_\delta(x) \subseteq U_{\delta_\alpha}(x)$ sowie $U_\delta(x) \subseteq U_{\delta_\beta}(x)$ und damit

$$U_\delta(x) \subseteq \underbrace{U_{\delta_\alpha}(x)}_{\subseteq O_\alpha} \cap \underbrace{U_{\delta_\beta}(x)}_{\subseteq O_\beta} \subseteq O_\alpha \cap O_\beta.$$

Da $x \in O_\alpha \cap O_\beta$ beliebig war, ist $O_\alpha \cap O_\beta$ offen.

Wir zeigen nun, dass $O := \bigcup_{\alpha \in \mathsf{A}} O_\alpha$ offen ist. Sei hierfür $x \in O$. Dann existiert ein $\alpha_0 \in \mathsf{A}$ mit $x \in O_{\alpha_0}$. Da O_{α_0} offen ist, existiert ein $\delta > 0$ mit $U_\delta(x) \subseteq O_{\alpha_0}$. Somit folgt

$$U_\delta(x) \subseteq O_{\alpha_0} \subseteq \bigcup_{\alpha \in \mathsf{A}} O_\alpha = O$$

Da $x \in O$ beliebig gewählt war, ist O offen.

Die Abgeschlossenheit der Mengen $A_\alpha \cup A_\beta$, $\alpha, \beta \in A$, und $A := \bigcap_{\alpha \in \mathsf{A}} A_\alpha$ folgt nun aus dem bereits Bewiesenen und den de Morganschen Regeln. Wie im Lösungsvorschlag zur Aufgabe 27 schreiben wir $Y^c := X \setminus Y$ für eine Teilmenge Y einer Menge X.

Seien nun $\alpha, \beta \in \mathsf{A}$. Dann sind nach Voraussetzung A_α, A_β abgeschlossen, also A_α^c, A_β^c offen. Nach dem bereits Bewiesenen ist dann aber auch $A_\alpha^c \cap A_\beta^c$ offen. Nach den de Morganschen Regeln ist dann aber auch

$$A_\alpha \cup A_\beta = ((A_\alpha \cup A_\beta)^c)^c = (A_\alpha^c \cap A_\beta^c)^c.$$

als Komplement einer offenen Menge abgeschlossen. Da die Mengen A_α, $\alpha \in \mathsf{A}$, nach Voraussetzung jeweils abgeschlossen sind, sind die Mengen A_α^c, $\alpha \in \mathsf{A}$, jeweils offen. Nach den de Morganschen Regeln und dem bereits Bewiesenen ist dann auch

$$A^c := \left(\bigcap_{\alpha \in \mathsf{A}} A_\alpha\right)^c = \bigcup_{\alpha \in \mathsf{A}} A_\alpha^c$$

offen. Also muss A abgeschlossen sein.

Bemerkung: (1) Der Durchschnitt abzählbar vieler offener Mengen bzw. die Vereinigung abzählbar vieler abgeschlossener Mengen ist im Allgemeinen *nicht* offen bzw. abgeschlossen. (2) Manchmal ist die Definition der Norm auf einem Vektorraum zu restriktiv. In Anlehnung an den in (i) und (ii) gezeigten Eigenschaften kann man aber eine allgemeinere Definition von Konvergenz, Stetigkeit, Differenzierbarkeit, etc. entwickeln, die ohne eine Norm auskommt. Dies führt zum Begriff der *Topologie*.

b) (i) Wir definieren $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^3 + 2y^3$. Dann ist f stetig und nach Satz 19.4 die Menge $f^{-1}(O)$ für jede offene Menge $O \subseteq \mathbb{R}$ offen. Da $M_1 = f^{-1}(O)$ mit $O := (0, 4)$ gilt, ist also M_1 offen. Ferner kann M_1 nach Satz 19.2 nicht abgeschlossen sein, da die Folge $(\frac{1}{n}, 0)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq M_1$ gegen $(0, 0) \notin M_1$ konvergiert.

(ii) Wir definieren $f, g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^3 - e^{-xy}$, $g(x,y) = x - y$. Dann sind f und g stetig und man sieht man schnell ein, dass $M_2 = f^{-1}(A_1) \cap g^{-1}(A_2)$ mit $A_1 = (-\infty, 3]$, $A_2 = (-\infty, 0])$ gilt. Da A_1 und A_2 abgeschlossen sind, folgt mit Aufgabenteil a) (ii) und Aufgabe 27 b), dass

$$M_2 = f^{-1}(A_1) \cap g^{-1}(A_2)$$

abgeschlossen ist. Ferner kann M_2 nicht offen sein. Dies kann man zum Beispiel wie folgt einsehen: Wie man schnell verifiziert, liegt $x := (0,0)$ in M_2. Nun gilt aber für jedes $\delta > 0$, dass $x_\delta := (\frac{\delta}{2}, 0) \in U_\delta((0,0))$, aber $x_\delta \notin M_2$ (da $\delta/2 \nleq 0$). Also kann es kein $\delta > 0$ geben mit $U_\delta(x) \subseteq M_2$. Folglich ist M_2 nicht offen.

(iii) Die Menge $M_3 := (0,1] \times (0,1] \subseteq \mathbb{R}^2$ ist weder offen noch abgeschlossen. Zum Beispiel liegt der Punkt $x := (1,1)$ in M_3, aber es gilt $U_\delta(x) \nsubseteq M_3$ für alle $\delta > 0$, wie man sich leicht klarmacht. Also kann M_3 nicht offen sein. Und weil die Folge $(\frac{1}{n}, 1)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq M_3$ gegen $(0,1) \notin M_3$ konvergiert, kann M_3 nach Satz 19.2 nicht abgeschlossen sein.

Aufgabe 30 (Tutorium)

Gegeben seien folgende Kurven:

$$\begin{aligned}
&\gamma_1\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3, \gamma_1(t) := (\cos(t), \sin(t), t),\\
&\gamma_2\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \gamma_2(t) := (t - \sin(t), 1 - \cos(t)),\\
&\gamma_3\colon [0, \vartheta] \to \mathbb{R}^2, \gamma_3(t) := (t\cos(t), t\sin(t)), \quad \text{wobei } \vartheta > 0 \text{ fest ist.}
\end{aligned}$$

a) Skizzieren Sie die Kurven γ_1, γ_2 und γ_3. Was beschreiben die Kurven anschaulich?

b) Berechnen Sie die Längen $L(\gamma_1), L(\gamma_2), L(\gamma_3)$ der Kurven $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$.
Hinweis: Zur Berechnung von $L(\gamma_2)$ verwende man die Substitution $t = 2u$ und die Identität $\cos^2(2u) = \cos^2(u) - \sin^2(u)$, $u \in \mathbb{R}$. Für $L(\gamma_3)$ verwende man die Substitution $t = \sinh(u)$.

Lösungsvorschlag:

a) Die Kurve $\gamma_1(t)$ beschreibt eine Helix, die sich um die z-Achse windet.
Die Kurve γ_2 ist eine sogenannte *Zykloide*, also die Bahn eines Punktes auf dem Rand eines rollenden Einheitskreises: Angenommen, zum Zeitpunkt $t = 0$ befinde sich der Mittelpunkt eines Einheitskreises im Punkt $(0,1)$ und sei ferner p der Punkt $(0,0)$ auf dem Rand des Einheitskreises. Rollt nun der Kreis mit Geschwindigkeit 1 in x-Richtung, so ist die Bahn des Mittelpunktes gegeben durch $m(t) = (t, 1)$, $t \geq 0$. Die Kurve γ_2 beschreibt nun die Bahn, die der Punkt p durch die Rollbewegung des Kreises durchläuft (wobei wegen $t \in [0, 2\pi]$ der Einheitskreis genau eine Rotation macht).
Die Kurve γ_3 ist die sogenannte *Archimedische Spirale*. Anfangspunkt der Kurve γ_3 ist der Ursprung $(0,0)$. Dann folgt eine Rotationsbewegung, wobei der Radius bzw. Abstand zum Ursprung genau der zurückgelegten Bogenlänge entspricht und daher mit wachsendem t zunimmt. So entsteht eine Spirale.

b) Sind $a < b$, $n \in \mathbb{N}$ und $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ eine Kurve, so ist die Länge $L(\gamma)$ der Kurve γ definiert durch

$$L(\gamma) := \int_a^b \|\gamma'(t)\|\, dt.$$

Es ist $\gamma_1'(t) = (-\sin(t), \cos(t), 1)$ für alle $t \in [0, 2\pi]$ und daher

$$L(\gamma_1) = \int_0^{2\pi} \|\gamma_1'(t)\|\, dt = \int_0^{2\pi} [\underbrace{\sin^2(t) + \cos^2(t)}_{=1} + 1]^{\frac{1}{2}}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\, dt = 2\sqrt{2}\pi.$$

Weiter ist $\gamma_2'(t) = (1 - \cos(t), \sin(t))$ für alle $t \in [0, 2\pi]$ und deshalb

$$\|\gamma_2'(t)\|^2 = (1 - \cos(t))^2 + \sin^2(t) = 1 - 2\cos(t) + \underbrace{\cos^2(t) + \sin^2(t)}_{=1} = 2(1 - \cos(t)), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Mit dem Hinweis folgt hieraus

$$\|\gamma_2'(2t)\| = \sqrt{2(1 - \cos(2t))} = \sqrt{2(1 - \cos^2(t) + \sin^2(t))} = \sqrt{4\sin^2(t)} = 2\sin(t), \quad t \in [0, \pi].$$

Wir berechnen nun

$$L(\gamma_2) = \int_0^{2\pi} \|\gamma_2'(t)\|\, dt = 2\int_0^{\pi} \|\gamma_2'(2t)\|\, dt = 2\int_0^{\pi} 2\sin(t)\, dt = -4\cos(t)|_0^{\pi} = 8.$$

Schließlich ist (nach der Produktregel)

$$\gamma_3'(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) - t\sin(t) \\ \sin(t) + t\cos(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}}_{=:v_1(t)} + t \underbrace{\begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}}_{=:v_2(t)}, \quad t \in [0, \vartheta].$$

Man rechnet schnell nach, dass $v_1(t) \perp v_2(t)$ und $\|v_1(t)\|^2 = \|v_2(t)\|^2 = 1$ für alle $t \in [0, \vartheta]$ gilt, sodass nach dem Satz von Pythagoras

$$\|\gamma_3'(t)\| = \|v_1(t) + tv_2(t)\| = \sqrt{1 + t^2}, \quad t \in [0, \vartheta].$$

Mit der Substitution $t = \sinh(u)$ und der Identität $\cosh^2(u) = 1 + \sinh^2(u)$ erhalten wir

$$L(\gamma_3) = \int_0^{\vartheta} \sqrt{1 + t^2}\, dt = \int_0^{a} \sqrt{1 + \sinh^2(u)}\cosh(u)\, du = \int_0^{a} \cosh^2(u)\, du,$$

wobei $a := a(\vartheta) := \sinh^{-1}(\vartheta)$. Mit Hilfe von partieller Integration lässt sich das rechte Integral umformen zu

$$\int_0^a \cosh^2(u)\, du = \sinh(u)\cosh(u)|_0^a - \int_0^a \sinh^2(u)\, du = \sinh(a)\cosh(a) + \int_0^a 1 - \cosh^2(u)\, du,$$

wobei wir einerseits die Identitäten $\sinh' = \cosh$, $\cosh' = \sinh$ und $\cosh^2 - \sinh^2 = 1$ benutzt haben und andererseits verwendet haben, dass wegen $\sinh(0) = 0$ auch $\sinh(0)\cosh(0) = 0$ ist. Es folgt

$$\begin{aligned} \int_0^a \cosh^2(u)\, du &= \frac{1}{2}\left(\sinh(a)\cosh(a) + a\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\sinh(a)\sqrt{1 + \sinh^2(a)} + a\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\vartheta\sqrt{1 + \vartheta^2} + \sinh^{-1}(\vartheta)\right). \end{aligned}$$

Somit ist

$$L(\gamma_3) = \frac{1}{2}\left(\vartheta\sqrt{1 + \vartheta^2} + \sinh^{-1}(\vartheta)\right).$$