

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

6. Übungsblatt

Aufgabe 31 (Übung)

- a) Untersuchen Sie, ob die Kurve

$$\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ \cosh(t) \end{pmatrix}$$

regulär ist und berechnen Sie gegebenenfalls die natürliche Parametrisierung von γ .

- b) Seien $n \in \mathbb{N}$, $r \in (0, \infty)$ und $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} \|x\|^r & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Bestimmen Sie (in Abhängigkeit von r) alle $x \in \mathbb{R}^n$, in denen f (partiell) differenzierbar ist und geben Sie $\nabla f(x) := \text{grad} f(x)$ für diese x an.

Aufgabe 32 (Tutorium)

- a) Seien $n, m \in \mathbb{N}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$. Ferner sei $x_0 \in D$. Fügen Sie (mit Begründung) Implikationspfeile zwischen den unten stehenden Aussagen ein, sodass die dadurch entstehenden Implikationen korrekt sind.

f ist partiell differenzierbar auf D und alle partiellen Ableitungen sind stetig in x_0 .

f ist differenzierbar in x_0 .

f ist stetig in x_0 .

f ist partiell differenzierbar in x_0 .

$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0)$ existiert für alle $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

- b) Seien $n, m \in \mathbb{N}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Funktion. Zeigen Sie: Existiert $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0)$ für ein $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und $x_0 \in D$, so gilt für alle $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\frac{\partial f}{\partial(\alpha v)}(x_0) = \alpha \frac{\partial f}{\partial v}(x_0).$$

Aufgabe 33 (Übung)

a) Sei $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Zeigen Sie

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0).$$

Ist dies ein Widerspruch zum Satz von Schwarz (Satz 19.8)? Begründen Sie.

b) In diesem Aufgabenteil sollen Sie die Aussagen (1) und (2) des Satzes 19.6 beweisen:

Seien nun $n, m \in \mathbb{N}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$ in $x_0 \in D$ differenzierbar. Zeigen Sie:

(i) f ist in x_0 stetig.

(ii) Für jeden Vektor $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ existiert $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0)$ und es gilt

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = J_f(x_0) \cdot v,$$

wobei $J_f(x_0) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ die Jacobimatrix von f an der Stelle x_0 bezeichnet.

Aufgabe 34 (Tutorium)

Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} \|x\|^2 \sin\left(\frac{1}{\|x\|}\right) & \text{für } x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \\ 0 & \text{für } x = 0, \end{cases}$$

im Punkt $x_0 := 0$ zwar differenzierbar, aber die partiellen Ableitungen von f in x_0 nicht stetig sind.

Aufgabe 35 (Übung)

Seien $n \in \mathbb{N}$, $p \in (0, \infty)$ und $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, sodass

$$(i) \quad f(\alpha x) = \alpha^p f(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n, \alpha > 0,$$

$$(ii) \quad M := \sup_{\|x\|=1} |f(x)| \in (0, \infty).$$

Wir wollen in dieser Aufgabe nun die Stetigkeit bzw. Differenzierbarkeit von f an der Stelle $x = 0$ in Abhängigkeit von p untersuchen. Zeigen Sie:

a) $f(0) = 0$ und $|f(x)| \leq M\|x\|^p$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Folgern Sie, dass f stetig in $x = 0$ ist.

b) Seien $p \in (0, 1)$ und $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Dann existiert $\frac{\partial f}{\partial v}(0)$ genau dann, wenn $f(v) = f(-v) = 0$ gilt. In diesem Fall ist $\frac{\partial f}{\partial v}(0) = 0$. Weiterhin ist f in 0 nicht differenzierbar.

- c) Seien nun $p = 1$ und $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Dann existiert $\frac{\partial f}{\partial v}(0)$ genau dann, wenn $f(-v) = -f(v)$ gilt. In diesem Fall gilt $\frac{\partial f}{\partial v}(0) = f(v)$. Weiterhin ist f in $x = 0$ genau dann differenzierbar, wenn f linear ist.
- d) Sei schließlich $p \in (1, \infty)$. Zeigen Sie, dass f in $x = 0$ differenzierbar ist mit $f'(0) = 0$.

Aufgabe 36 (Tutorium)

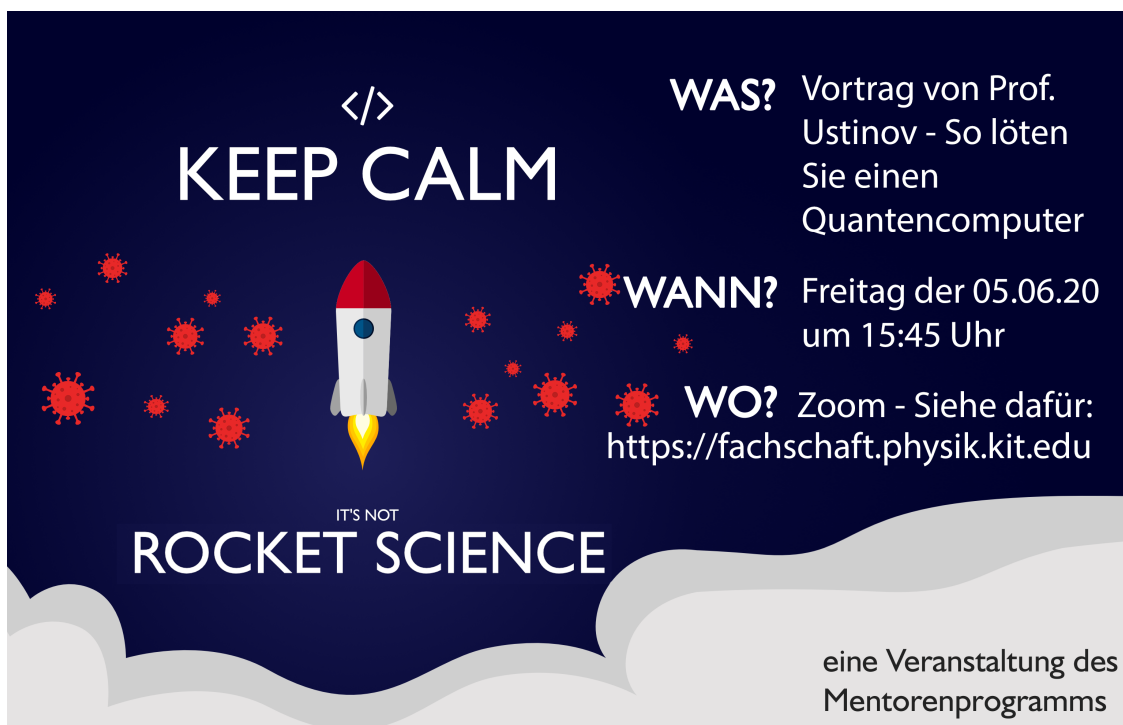
Gegeben seien die Funktionen $f_1, f_2, f_3, f_4: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f_1(0, 0) = f_2(0, 0) = f_3(0, 0) = f_4(0, 0) := 0$ und

$$f_1(x, y) = \frac{x + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad f_2(x, y) = \frac{|x|^{\frac{1}{2}}x + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$f_3(x, y) = \frac{(x + y)^2(x - y)}{x^2 + y^2}, \quad f_4(x, y) = \frac{(x + y)^2|x - y|^{\frac{3}{2}}}{x^2 + y^2}$$

für $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Untersuchen Sie, ob die Funktionen f_1, f_2, f_3 und f_4 im Punkt $(0, 0)$ differenzierbar sind.

Eine Information Ihrer Fachschaft:



</>
KEEP CALM

IT'S NOT
ROCKET SCIENCE

WAS? Vortrag von Prof. Ustinov - So löten Sie einen Quantencomputer

WANN? Freitag der 05.06.20 um 15:45 Uhr

WO? Zoom - Siehe dafür: <https://fachschaft.physik.kit.edu>

eine Veranstaltung des Mentorenprogramms

<https://fachschaft.physik.kit.edu/drupal/content/mentorenprogramm-ss-20>